SÉRIE A, Nº 2240
Nº D'ORDRE : 3111

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES PHYSIQUES

PAR

Gilbert NASSE

1re THÈSE. — Contribution à l'étude du Circuit de Régulation.

2e THÈSE. — PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ.

Soutenues le 10 juin 1947, devant la Commission d'examen.

MM. L. DE BROGLIE, *Président.*
Y. ROCARD
PAUTHENIER } *Examinateurs.*

PARIS
HERMANN & Cie, ÉDITEURS
6, RUE DE LA SORBONNE, 6

1949

FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS

Nom du Candidat : **NASSE.**

Prénom : **Gilbert.**

Date de la soutenance : 10 juin 1947.

Numéro d'ordre : Série A, 2240, N° 3111.

1

NASSE (Gilbert). — Contribution à l'étude du circuit de régulation. — *Paris*, Hermann, édit., 1949, in 8°, 120 p., 47 fig.

(*Th. Sc. Phys. Paris, 1947. Sér. A. 2240. N° 3111*).

2

NASSE (Gilbert). — Contribution à l'étude du circuit de régulation. — *Paris*, Hermann, édit., 1949, in-8°, 120 p., 47 fig.

(*Th. Sc. Phys. Paris, 1947. Sér. A. 2240. N° 3111*).

3

NASSE (Gilbert). — Contribution à l'étude du circuit de régulation. — *Paris*, Hermann, édit., 1949, in-8°, 120 p., 47 fig.

(*Th. Sc. Phys. Paris, 1947. Sér. A. 2240. N° 3111*).

4

NASSE (Gilbert). — Contribution à l'étude du circuit de régulation. — *Paris*, Hermann, édit., 1949, in-8°, 120 p., 47 fig.

(*Th. Sc. Phys. Paris, 1947. Sér. A. 2240. N° 3111*).

SÉRIE A, N° 2240
N° D'ORDRE : 3111

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES
DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES PHYSIQUES

PAR

Gilbert NASSE

1re THÈSE. — **Contribution à l'étude du Circuit de Régulation.**

2e THÈSE. — PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ.

Soutenues le 10 juin 1947, devant la Commission d'examen.

MM. L. DE BROGLIE, *Président.*
Y. ROCARD
PAUTHENIER } *Examinateurs.*

PARIS
HERMANN & Cie, ÉDITEURS
6, RUE DE LA SORBONNE, 6

1949

FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

Doyen . . . . . M. JEAN CABANNES

PROFESSEURS

L. BLARINGHEM.	T	Botanique.
G. JULIA.	T	Analyse supérieure et Algèbre supérieure.
C. MAUGUIN. . .	T	Minéralogie.
A. DENJOY . . .	T	Théorie des Fonctions.
L. LUTAUD . . .	T	Géographie physique et Géologie dynamique.
E. DARMOIS. . .	T	Enseignement de Physique.
Robert LÉVY. .	T	Physiologie comparée.
Henri VILLAT. .	T	Mécanique des fluides et applications.
Ch. JACOB. . . .	T	Géologie.
P. PASCAL. . . .	T	Chimie générale.
M. FRÉCHET. . .	T	Calcul des Probabilités et Physique mathématique.
Mme RAMART-LUCAS	T	Chimie organique.
H. BÉGHIN . . .	T	Mécanique physique et expérimentale.
FOCH	T	Mécanique expérimentale des fluides.
PAUTHENIER. . .	T	Electrotechnique générale.
De BROGLIE. . .	T	Théories physiques.
JOB	T	Chimie générale.
PRENANT	T	Anatomie et Histologie comparées.
VILLEY	T	Mécanique appliquée.
COMBES	T	Physiologie végétale.
GARNIER	T	Géométrie supérieure.
PÉRÈS.	T	Mécanique rationnelle.
HACKSPILL . . .	T	Chimie minérale.
LAUGIER	T	Physiologie générale.
TOUSSAINT . . .	T	Technique Aéronautique.
M. CURIE	T	Physique (P. C. B.).
G. RIBAUD. . . .	T	Hautes températures.
CHAZY	T	Mécanique analytique.
H. GAULT . . .	T	Chimie appliquée.
CROZE	T	Physique théorique et Physique céleste.
DUPONT.	T	Théories chimiques.
LANQUINE. . . .	T	Géologie structurale et géologie appliquée.
VALIRON	T	Calcul différentiel et calcul intégral.
BARRABÉ		Géologie structurale et géologie appliquée.
VAVON	T	Analyse et mesures chimiques.
G. DARMOIS . .	T	Mathématiques générales.
CHATTON	T	Biologie maritime.
AUBEL		Chimie biologique.
J. BOURCART. .		Géographie physique et Géologie dynamique.
Mme JOLIOT-CURIE.	T	Physique générale et Radioactivité.
PLANTEFOL . . .	T	Botanique.
CABANNES . . .	T	Recherches physiques.
GRASSÉ.	T	Zoologie (Evolution des êtres organisés).
PRÉVOST		Chimie organique.
BOULIGAND . . .	T	Application de l'analyse à la Géométrie.
CHAUDRON . . .	T	Chimie.
WYART		Minéralogie.
TEISSIER	T	Zoologie.
MANGENOT . . .	T	Biologie végétale.
P. AUGER. . . .	T	Physique quantique et relativité.
MONNIER		Physiologie générale.
PIVETEAU		Géologie.
ROCARD	T	Physique.
H. CARTAN. . .		Calcul différentiel.
SCHAEFFER. . .	T	Physiologie des fonctions.
LAFFITTE. . . .		Chimie (P. C. B.).
LERAY		Mécanique théorique des fluides.
FAVART.		Calcul des probabilités et physique-mathématique.
COULOMB. . . .	T	Physique du globe.
Mlle COUSIN . .		Biologie animale (P. C. B.).
CHRÉTIEN . . .		Analyse et mesures chimiques.
KASTLER		Physique.
DRACH		Evolution des êtres organisés.
CHATELET	T	Arithmétique et théorie des nombres.
EPHRUSSI.	T	Génétique.
WURMSER	T	Biologie physico-chimique.
BAUER.	T	Chimie physique.
RIVIÈRE.		Géologie (P. C. B.).
GAUTHERET. . .		Biologie Végétale (P. C. B.).
LUCAS		Physique.
MAX MORAND. .		Physique.
ARNULF		Optique appliquée.
A. THOMAS . . .		Zoologie.
SOLEILLET. . . .		Physique.
FORTER		Mécanique expérimentale des fluides.
DANJON	T	Astronomie.
FROMAJEOT. . . .		Chimie biologique.
LAPORTE		Physique générale et Radioactivité.

Secrétaire..... Ch. MONIER.

R. UNIV. BIBLIOTHEEK LEIDEN

A MA FEMME

A Monsieur le Professeur Louis De BROGLIE

Secrétaire perpétuel
de l'Académie des Sciences

En témoignage de ma vive gratitude et de mon profond respect.

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41549220_0082

INTRODUCTION

Le développement des connaissances scientifiques au cours du dernier siècle a profondément modifié le cadre matériel de notre civilisation.

L'emploi systématique de machines-outils, l'organisation de distributions collectives d'énergie, l'utilisation de servo-moteurs et d'automates, tendent à diminuer sans cesse l'effort physique demandé à l'homme, tout en accroissant considérablement les produits de son travail.

L'évolution qui se poursuit actuellement présente, entre autres caractéristiques, celle de faire de plus en plus appel à des dispositifs de réglage automatique dans le but de maintenir certaines grandeurs physiques dans d'étroites limites par rapport à des valeurs constantes ou variables suivant une loi prédéterminée.

Ces grandeurs sont très diverses ; citons par exemple :

La tension et la fréquence des distributions d'énergie électrique. La pression des distributions de gaz, la température des fluides utilisés au chauffage des locaux, la température des fours de traitement thermique. La vitesse de rotation de nombreuses machines. Tous les mécanismes asservis, servo-moteurs et automates.

Les perfectionnements de la technique permettent d'accroître le nombre des grandeurs réglées tout en diminuant les tolérances acceptées sur leurs valeurs instantanées.

Il est donc naturel de voir substituer aux premiers réglages manuels des dispositifs chargés de régler automatiquement ces grandeurs particulières auxquelles on porte de plus en plus intérêt.

Dans tout dispositif de réglage automatique, il doit nécessairement exister un organe capable de détecter tout écart de la grandeur que l'on se propose de régler et d'engendrer des ordres de correction qui permettront à leur tour de modifier la grandeur à régler de façon à annuler tout écart.

Les opérations de réglage : Détection de l'écart, génération de

l'ordre de correction, action sur l'organe de réglage, modification de la grandeur à régler, décrivent un circuit fermé car toute variation de la grandeur à régler sous l'effet de l'ordre de correction modifie à son tour l'écart de réglage initial d'où le nom de « Circuit de Régulation » donné à l'ensemble des appareils effectuant un réglage automatique.

Un circuit de régulation peut être simple ou compliqué ; l'association par exemple d'une machine à vapeur et de son régulateur de vitesse constitue un circuit de régulation particulièrement smple qui ne comprend que deux éléments : la machine dont la vitesse doit être réglée, et le régulateur.

Mais on peut imaginer des circuits beaucoup plus compliqués où chaque élément du circuit est sensible à plusieurs grandeurs de même espèce, ces éléments étant réunis les uns aux autres de façon à former un schéma complexe.

Dans le cas familier du circuit électrique, le circuit simple est formé par la connexion d'un générateur et d'un récepteur, et le circuit compliqué peut être, par exemple, un réseau maillé polyphasé.

Comme le circuit électrique, le circuit de régulation obéit à des lois. Cependant, il ne semble pas que leur étude ait fait l'objet d'un travail d'ensemble, les principales publications ne dépassant pas le cadre de l'assemblage de deux éléments en vue du réglage d'une seule grandeur.

Il nous est apparu qu'un effort de synthèse pouvait être tenté pour construire une théorie complète du circuit de régulation à l'image de ce qui a été fait depuis fort longtemps pour le circuit électrique.

Tel est l'objet du présent travail qui comprend cinq parties.

— Dans la première, nous examinerons la constitution du circuit de régulation ainsi que les différents éléments et les diverses espèces de grandeurs qui s'y rencontrent.

— Dans la seconde, nous étudierons les propriétés du circuit de régulation dans sa forme la plus simple : deux éléments, une seule grandeur à régler. C'est ce que nous appellerons « Le circuit de régulation canonique d'une seule grandeur ».

— Dans la troisième, nous passerons à l'étude d'un circuit de régulation déjà plus complexe comprenant toujours deux éléments mais comportant plusieurs grandeurs à régler. C'est ce que nous

appellerons « le circuit de régulation canonique de plusieurs grandeurs ».

— Dans la quatrième, nous établirons les lois générales du circuit de régulation complexe formé d'un nombre quelconque d'éléments par une généralisation à deux degrés :

— un premier qui nous permettra de passer du circuit canonique d'une seule grandeur au circuit complexe où chaque branche contient un élément ne comportant qu'une seule grandeur de même espèce ;

— un second, où chaque branche du circuit complexe contient un élément comportant plusieurs grandeurs de même espèce.

Ces lois générales jouent dans le cas du circuit de régulation, le rôle des lois de Kirchhoff pour le circuit électrique.

— La cinquième partie, enfin, contient des exemples d'application à l'étude de quelques cas concrets.

* * *

Nous tenons à témoigner notre très respectueuse gratitude à Monsieur le Professeur L. de Broglie, secrétaire perpétuel de l'Académie des Sciences, qui a bien voulu s'intéresser à ce travail et nous faire l'honneur de présider notre jury de thèse.

Nous remercions aussi Monsieur Y. Rocard, Directeur des Laboratoires de Physique de l'Ecole normale supérieure et M. Pauthenier, Professeur à la Sorbonne et à l'Ecole supérieure d'Electricité qui ont bien voulu faire partie de notre jury.

Nous tenons enfin à exprimer notre gratitude à Monsieur E. Mercier, président de l'*Union d'Electricité* et à Monsieur P. Ailleret, directeur des Etudes et Recherches de l'*Electricité de France*, pour les facilités qu'ils nous ont accordées dans nos recherches.

PREMIÈRE PARTIE

Constitution du circuit de régulation. Classification des différents éléments et des différentes espèces de grandeurs qui s'y rencontrent

1. Constitution du circuit de régulation

Un tel circuit est formé d'une suite d'éléments matériels réunis les uns aux autres par une ou plusieurs grandeurs physiques. Celles-ci sortent d'un élément pour rentrer dans l'élément suivant. L'ensemble des éléments ainsi réunis forme une ou plusieurs mailles.

La structure du circuit de régulation sera particulièrement simple lorsque ce dernier se réduit à une seule maille et lorsque la liaison d'un élément à l'autre, est assurée par une seule grandeur.

Examinons un cas concret rentrant dans cette dernière catégorie : le circuit de régulation assurant le réglage automatique de la vitesse d'une machine à vapeur.

La machine avec les chaudières qui l'alimentent et les récepteurs qu'elle entraîne constitue un premier élément.

Le régulateur de vitesse constitue un second élément réuni au premier par la grandeur physique « Vitesse de rotation de l'arbre de la machine à vapeur ».

Le régulateur de vitesse est réuni à son tour à la machine à vapeur, soit au moyen d'un tringlage qui lie la position de la vanne d'admission de vapeur à la position du manchon du régulateur de vitesse, auquel cas l'élément « Régulateur de vitesse » est lié à l'élément « Machine à vapeur » par la grandeur physique « Position du tringlage », soit au moyen d'un servo-moteur constituant un ou plusieurs éléments supplémentaires réunis les uns aux autres par une grandeur physique.

L'ensemble constitue bien un assemblage d'éléments réunis les

uns aux autres par une seule grandeur et forme une maille fermée.

On peut imaginer un circuit de régulation de plus en plus compliqué.

— soit qu'il ne forme qu'une seule maille constituée d'éléments réunis les uns aux autres par plusieurs grandeurs physiques : tel serait le cas du circuit de régulation précédent où la machine à vapeur serait remplacée par une turbine à vapeur à soutirage. L'élément turbine serait alors réuni à l'élément régulateur par deux grandeurs physiques : la vitesse de rotation de l'arbre de la turbine, la pression de vapeur au soutirage. Nous pourrons alors régler deux grandeurs : la vitesse de rotation, et la pression du soutirage.

L'élément « régulateur » sera à son tour réuni à l'élément « turbine » par deux tringlages commandant : l'un la vanne d'admission de vapeur, l'autre, la vanne du soutirage.

— soit qu'il forme plusieurs mailles, possédant des branches communes, dont les différents éléments sont réunis les uns aux autres par une seule grandeur ;

— soit, même, qu'il forme plusieurs mailles, possédant des branches communes, dont les différents éléments sont réunis les uns aux autres par plusieurs grandeurs.

Ces trois types de circuits de régulation permettent de réaliser le réglage simultané de plusieurs grandeurs.

Remarque. — Le réglage manuel, tel qu'il est réalisé par un opérateur vigilant, rentre dans le schéma de constitution du circuit de régulation que nous venons d'établir : l'opérateur constitue l'un des éléments du circuit ; il perçoit, généralement par l'intermédiaire de la vue, une grandeur physique sous forme de déplacement d'aiguille sur un indicateur et actionne au moyen de ses mains un volant ou des contacts qui établissent la liaison avec l'élément qui le suit dans le circuit de régulation.

2. Classification des éléments constituant un circuit de régulation. Eléments semi-libres. Eléments dépendants

Les éléments matériels qui constituent un circuit de régulation peuvent être répartis en deux classes distinctes.

La première comprend les éléments qui sont sous la dépendance directe de grandeurs physiques absolument indépendantes, à variations imprévues, que nous appellerons « grandeurs libres ».

Les éléments de cette classe contiennent tous une ou plusieurs grandeurs libres dont les variations imprévues perturbent les grandeurs que l'on se propose de régler et déclenchent, de ce fait, les mécanismes du circuit de régulation.

Pour rappeler la présence de grandeurs libres, nous appellerons les éléments de cette classe : ELÉMENTS SEMI-LIBRES.

La seconde comprend tous les autres éléments, c'est-à-dire, ceux qui ne contiennent aucun imprévu et, en opposition aux éléments semi-libres doués d'une certaine indépendance, nous appellerons les éléments de la seconde classe : ELÉMENTS DÉPENDANTS.

Un exemple permettra de faire clairement comprendre le sens exact de cette classification.

Considérons un groupe turbo-générateur à vapeur alimentant un réseau électrique isolé, muni d'un régulateur de vitesse chargé de maintenir constante la vitesse de rotation du groupe, donc la fréquence du réseau qu'il alimente.

Nous nous trouvons en présence d'un circuit de régulation constituant une maille simple où les différents éléments sont réunis les uns aux autres par une seule grandeur.

Ces éléments sont au nombre de trois :

— le premier est constitué par le groupe turbo-alternateur, la chaufferie qui l'alimente et le réseau qu'il dessert ;

— le second est constitué par le régulateur de vitesse ;

— le troisième, enfin, peut être considéré comme formé du servomoteur manœuvrant la vanne d'admission de vapeur de la turbine et du distributeur qui le commande ;

Dans le premier élément, la vitesse de rotation, grandeur que l'on se propose de régler, dépend

— de la position de la vanne d'admission de vapeur ;
— de la pression et de la température de celle-ci ;
— de la puissance absorbée par le réseau de distribution.

Or, cette puissance dépend elle-même de la fréquence et d'un paramètre que nous appellerons « Paramètre de charge de la clien-

tèle » qui définit la puissance absorbée par le réseau de distribution lorsque la fréquence a sa valeur de consigne.

Les variations de ce paramètre de charge au cours du temps engendrent la courbe de charge de la clientèle, c'est-à-dire la puissance absorbée par le réseau de distribution, ramenée à la valeur de consigne de la fréquence.

La pression de la vapeur, sa température, le paramètre de charge de la clientèle constituent des grandeurs physiques dont les variations sont imprévisibles (1) ; ce sont ces grandeurs libres qui agissent sur le premier élément du circuit, l'élément Chaufferie-Groupe-Réseau.

Cet élément est donc un *élément semi-libre*.

Les deux autres éléments, régulateur de vitesse et servo-moteur de la vanne d'admission de vapeur, ne contiennent aucun imprévu. Ce sont des *éléments dépendants*.

3. Classification des différentes espèces de grandeurs qui figurent dans les éléments du circuit de régulation

Les différentes grandeurs physiques que l'on rencontre dans les éléments du circuit de régulation, quelle que soit leur nature intrinsèque (vitesse, température, déplacement, pression, tension..., etc.) se répartissent en trois espèces distinctes :

Les grandeurs libres, grandeurs indépendantes dont les variations sont imprévues.

Les grandeurs d'entrée, grandeurs qui agissent à l'entrée des éléments et y jouent le rôle des *causes*.

Les grandeurs de sortie, grandeurs qui se rencontrent à la sortie des éléments et y remplissent le rôle d'*effets*.

Un élément semi-libre contient les *trois espèces de grandeurs*.

Un élément dépendant ne contient que deux d'entre-elles, grandeurs d'entrée et grandeurs de sortie, *il ne contient pas de grandeurs libres*.

---

(1) Remarquons que le réglage automatique de la pression et de la température de la vapeur permet d'éliminer pratiquement l'influence des deux premières grandeurs libres sur le groupe turbo-générateur. Il ne resterait alors qu'une seule grandeur libre, le paramètre de charge de la clientèle, qui ne peut être éliminé.

On choisit habituellement les grandeurs que l'on se propose de régler parmi les grandeurs de sortie d'un élément semi-libre qui portent alors le nom de *grandeurs réglées.*

Les grandeurs d'entrée de cet élément prennent alors le nom de *grandeurs de réglage.*

D'une manière générale, nous appellerons « *Grandeurs réglées* » les grandeurs que l'on se propose de régler et « *Grandeurs de réglage* » les grandeurs sur lesquelles on se propose d'agir pour assurer le réglage des grandeurs réglées.

Les qualificatifs « grandeurs d'entrée, grandeurs de sortie » seront employés pour désigner les grandeurs d'entrée et de sortie des éléments intermédiaires rencontrés dans le circuit de régulation.

Nous représenterons symboliquement un élément du circuit de régulation par un rectangle portant autant de flèches que cet élément contient de grandeurs des trois espèces. La direction parallèle au petit axe du rectangle étant réservée aux grandeurs libres.

Nous aurons ainsi les représentations symboliques suivantes :

— Elément semi-libre contenant deux grandeurs libres — une grandeur d'entrée et une grandeur de sortie

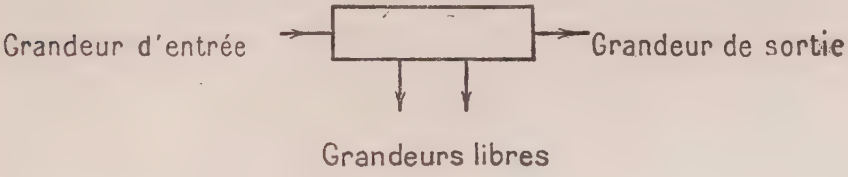


FIG. 1.

— Elément dépendant contenant deux grandeurs d'entrée et deux grandeurs de sortie

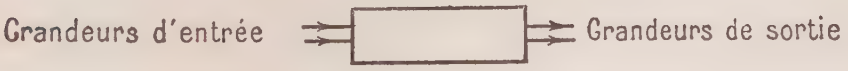


FIG. 2.

La distinction entre grandeurs d'entrée ayant le caractère de Causes et grandeurs de sortie ayant le caractère d'Effets conduit à définir le sens des actions de régulation dans un circuit : c'est celui qui permet de décrire le circuit en traversant chaque élément de l'entrée à la sortie.

4. Théorèmes généraux sur le nombre des éléments des deux classes et celui des grandeurs des trois espèces qui se rencontrent dans un circuit de régulation

N° 1. — Tout circuit de régulation comporte au moins un élément seul libre.

En effet, s'il n'existait aucune grandeur libre dans le circuit de régulation, il n'y aurait aucune perturbation de grandeurs réglées. L'existence du circuit de régulation suppose donc une cause indépendante de perturbation, donc au moins une grandeur libre, et, de ce fait, le circuit de régulation doit contenir au moins un élément semi-libre.

N° 2. — Le circuit de régulation le plus simple comporte un élément semi-libre et un élément dépendant.

En effet, ce circuit doit comporter au minimum deux éléments pour constituer une chaîne fermée et l'un de ces éléments doit être un élément semi-libre d'après le théorème n° 1. Le second élément peut être, soit un élément semi-libre, soit un élément dépendant. Si cet élément était un élément semi-libre, le circuit disposerait alors d'au moins deux grandeurs libres alors qu'une seule suffit. Le deuxième élément du circuit de régulation le plus simple doit donc être un élément dépendant.

N° 3. — Si, dans un circuit de régulation en simple chaîne, où il n'y a qu'une seule grandeur réglée, on rencontre plusieurs grandeurs libres, celles-ci peuvent être remplacées par une grandeur libre fictive unique.

En effet, les variations de chaque grandeur libre perturbent directement ou indirectement la grandeur réglée ; on peut donc imaginer que chaque perturbation de cette dernière grandeur est causée par les variations d'une grandeur libre unique équivalente, par ses effets, à la résultante des effets des grandeurs libres réelles.

N° 4. — Dans un circuit de régulation où l'on se propose de régler plusieurs grandeurs, le nombre des grandeurs libres doit tre au moins égal à celui des grandeurs réglées.

En effet, si ce nombre était inférieur à celui des grandeurs réglées, il existerait entre ces dernières grandeurs une ou plusieurs

relations indépendantes des grandeurs libres et le nombre des grandeurs réglées se trouverait ramené à celui des grandeurs libres.

N° 5. — Dans un circuit de régulation où l'on se propose de régler plusieurs grandeurs, le nombre des grandeurs de réglage doit être égal à celui des grandeurs à régler.

En effet, s'il en était autrement, il existerait une ou plusieurs relations entre grandeurs de réglage si celles-ci sont en surnombre, entre grandeurs réglées dans le cas contraire, indépendantes des grandeurs réglées ou des grandeurs de réglage. Le nombre des grandeurs réglées et celui des grandeurs de réglage doivent donc être égaux.

Corollaire. — Tout circuit de régulation peut se ramener à un circuit de régulation canonique où le nombre des grandeurs libres, celui des grandeurs réglées et celui des grandeurs de réglage sont égaux. Ceci résulte immédiatement des n^{os} 3, 4 et 5.

N° 6. — Lorsque les grandeurs libres n'interviennent qu'implicitement dans les équations du circuit de régulation, elles interviennent explicitement par leurs dérivées par rapport au temps.

En effet, les grandeurs libres agissent sur un élément semi-libre pour modifier certaines de ses grandeurs internes : couple résistant, couple moteur, tension d'alimentation, etc... Lorsque ces différentes grandeurs sont des fonctions implicites des grandeurs libres, celles-ci apparaîtront explicitement lorsque l'on exprime les dérivées de ces grandeurs par rapport au temps.

Par exemple, le couple résistant C_r d'un groupe turbo-alternateur alimentant un réseau isolé est fonction de la fréquence f et d'une grandeur libre c paramètre de charge de la clientèle.

Nous pourrons écrire $C_r = C\ (f\ c)$

En dérivant par rapport au temps

$$\frac{d}{dt}(C_r) = \frac{\partial C}{\partial f}\frac{df}{dt} + \frac{\partial C}{\partial c}\frac{dc}{dt}$$

la grandeur libre c n'intervient explicitement que par sa dérivée.

Corollaire. — Lorsque les variations des grandeurs libres sont des multiples de l'impulsion ou de l'échelon unité les grandeurs libres qui ne figurent pas explicitement n'y sont plus représentées par leurs dérivées, car celles-ci sont nulles pour toute valeur du

temps postérieure à l'instant de la variation dans les équations du circuit de régulation. La forme des expressions mathématiques qui représentent le comportement des différents éléments du circuit ne permet plus de distinguer un élément semi-libre d'un élément dépendant. Seules, les conditions initiales définissent complètement la perturbation.

N° 7. — La fermeture d'un circuit de régulation simple comportant une maille de deux éléments : un élément semi-libre, un élément dépendant, pose le même problème de stabilité que la variation de la grandeur libre du circuit fermé.

En effet, les caractéristiques essentielles du régime transitoire, caractéristiques qui conduisent à la stabilité ou à l'instabilité ne dépendent que de la structure des éléments du circuit ; elles sont indépendantes de la nature de la perturbation : variation de la grandeur libre ou variation des conditions initiales.

5. Emploi de grandeurs réduites

La mise en équation du comportement du circuit de régulation fait intervenir les valeurs instantanées d'un certain nombre de grandeurs et les écarts de certaines d'entre elles par rapport à leur valeur dans un état d'équilibre servant de repère.

Il est intéressant de simplifier les écritures et de ramener les équations des éléments qui composent un circuit de régulation à des formes types.

Cette simplification peut être facilement obtenue en substituant à la valeur instantanée x de la grandeur X la valeur réduite $\frac{x}{x_m}$, rapport de la valeur instantanée à la valeur maximum x_m que peut atteindre la grandeur X au cours de sa variation. Le choix de x_m contient une large part d'arbitraire, on profite de cette indétermination pour choisir les différentes valeurs x_m, y_m, z_m... des grandeurs X Y Z, de telle façon qu'elles se correspondent les unes aux autres ce qui fait disparaître les coefficients numériques liés à chaque réalisation particulière.

Dans certains cas, il est indiqué de considérer, au lieu de la valeur instantanée x de la grandeur X, l'écart $e = x - x_o$ de cette grandeur par rapport à une valeur de référence x_o. L'écart réduit

sera alors le rapport $\frac{e}{e_m} = \frac{x - x_o}{x_m - x_o}$ de l'écart instantané à l'écart maximum $e_m = (x_m - x_o)$ que peut atteindre la grandeur X au cours de sa variation.

Pour montrer l'intérêt de l'emploi de grandeurs réduites, nous considérerons deux types particulièrement simples d'éléments dépendants :

a) le levier simple ;
b) le levier à dash pot.

a) *Cas du levier simple,*

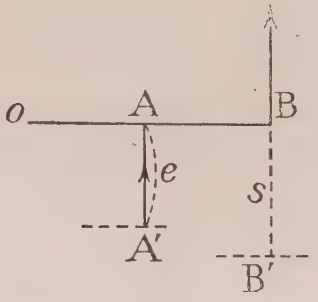


FIG. 3.

Soit AOB un levier simple interposé dans une tringlerie : son rôle consiste à modifier dans un rapport constant le déplacement du point mené par rapport au déplacement du point menant.

Repérons la position des points A et B par leur cote par rapport à deux plans horizontaux P_1 et P_2 servant de repère.

soit *e* la cote du point A, *s* la cote du point B, et considérons :

e comme la grandeur d'entrée de l'élément dépendant « Levier simple » ;

s comme la grandeur de sortie de ce même élément.

Soit e_m et s_m les valeurs maxima des cotes des points A et B.

Choisissons les plans P_1 et P_2 de telle façon que ces cotes maxima soient dans le rapport des bras de levier

$$\frac{e_m}{s_m} = \frac{OA}{OB} \qquad (1)$$

(points OA′ B′ en ligne droite)

Nous aurons alors

$$\frac{e}{s} = \frac{OA}{OB} \qquad (2)$$

$\frac{OA}{OB}$ prend une valeur particulière pour chaque levier considéré.

Introduisons les grandeurs réduites :

$$\varepsilon = \frac{e}{e_m} \qquad \sigma = \frac{s}{s_m},$$

il vient :

$$\frac{\varepsilon}{\sigma} = \frac{e}{e_m}\frac{s_m}{s} = \frac{OA}{OB}\frac{OB}{OA} = 1 \qquad (3)$$

donc, $\varepsilon = \sigma$, les grandeurs réduites sont égales, le rapport des bras de levier qui figurait dans (2) a disparu et le levier ne manifeste plus sa présence par un coefficient numérique particulier.

Considérons maintenant comme grandeurs d'entrée et de sortie les déplacements des points A et B par rapport à une position de référence du levier.

Les déplacements des points A et B seront repérés par les différences de cote par rapport à deux plans horizontaux P_1 et P_2 complètement arbitraires.

Soit :

$e = E - E_o$ le déplacement du point A ou écart d'entrée.
$s = S - S_o$ le déplacement du point B ou écart de sortie.

Ces deux écarts sont liés par la relation :

$$\frac{e}{s} = \frac{E - E_o}{S - S_o} = \frac{OA}{OB} \qquad (4)$$

rapport qui dépend du levier considéré.

Introduisons les écarts réduits :

$$\varepsilon = \frac{e}{e_m} = \frac{E - E_o}{E_m - E_o}$$

$$\sigma = \frac{s}{s_m} = \frac{S - S_o}{S_m - S_o}$$

E_m et S_m étant les cotes maxima des points A et B,
il vient :

$$\frac{\varepsilon}{\sigma} = \frac{e}{e_m} \cdot \frac{s_m}{s} = \frac{OA}{OB} \cdot \frac{OB}{OA} = 1 \qquad (5)$$

d'où $\varepsilon = \sigma$ les écarts réduits sont égaux, le rapport des bras de levier a disparu.

b) *Cas du levier à dash pot.*

Cet appareil, représenté par la figure ci-contre, est constitué par l'accouplement de deux leviers simples au moyen d'un dash pot à ressort.

Soit O A X et O′ Y B ces deux leviers, dont les rapports des bras de levier sont respectivement :

$$\frac{OX}{OA} = R_1 \qquad \frac{OB}{OY} = R_2$$

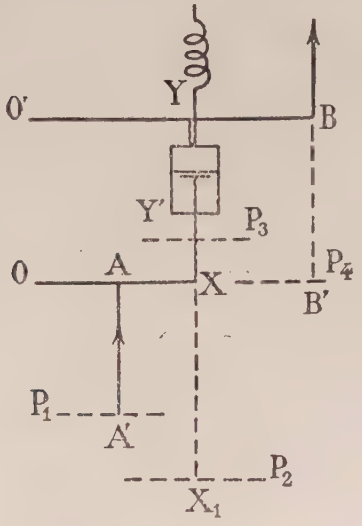


Fig. 4.

Repérons la position des points A X Y B par leur cote par rapport à quatre plans horizontaux P_1 P_2 P_3 P_4 servant de repère, soit :

e, x, y, s les cotes des points A, X, Y, B.

Considérons e comme grandeur d'entrée de l'élément dépendant « Levier à dash pot » et s comme la grandeur de sortie de ce même élément.

Représentons par e_m x_m y_m s_m les valeurs maxima de e x y s et choisissons les plans P_1 et P_2 d'une part, P_3 et P_4 d'autre part, pour que

$$\frac{x_m}{e_m} = R_1 \qquad \frac{s_m}{y_m} = R_2 \tag{6}$$

(points O A′ X′ et O′ Y′ B′ en ligne droite).

En négligeant l'influence de l'inclinaison de l'axe du dash pot pendant son déplacement, les cotes des points X et Y sont liées par la relation

$$\frac{d}{dt}(x - y) = \frac{1}{T_E} y \tag{7}$$

qui définit le comportement du dash pot et de son ressort.

T_E y représente le temps d'écoulement, c'est-à-dire le temps nécessaire au déplacement du piston dans le cylindre sous un effort égal à celui qui est assuré par la bande maxima du ressort.
x et y sont liés aux grandeurs d'entrée et de sortie e et s par les relations

$$x = R_1 e \tag{8}$$

$$y = \frac{1}{R_2} s \tag{9}$$

En substituant dans 7 il vient :

$$R_1 \frac{de}{dt} - \frac{1}{R_2} \frac{ds}{dt} = \frac{1}{R_2} T_E s \tag{10}$$

Expression qui contient, outre le temps d'écoulement T_E les rapports R_1 et R_2 des bras de leviers des leviers O A X et O′ Y B.

Introduisons les grandeurs réduites :

$$\varepsilon = \frac{e}{e_m} \qquad \sigma = \frac{s}{s_m}$$

et choisissons s_m de telle façon que $s_m = R_1 R_2 e_m$, s_m représente alors la cote du point B correspondant à la cote maximum du point A lorsque le dash pot est remplacé par une liaison rigide. La relation (10) devient alors :

$$R_1 e_m \frac{d\varepsilon}{dt} - \frac{R_1 R_2 e_m}{R_2} \frac{d\sigma}{dt} = \frac{R_1 R_2 e_m}{R_2 T_E} \sigma$$

ou encore :

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{1}{T_E} + \frac{d\sigma}{dt} \tag{11}$$

Cette relation ne contient plus que le temps d'écoulement, caractéristique du dash pot et de son ressort, à l'exclusion de toute autre quantité particulière.

Le même raisonnement pourrait être repris en considérant comme grandeur d'entrée et de sortie les écarts de cote des points A X Y B.

En représentant ces écarts par e, x, y, s on aboutit à la relation (10) sans qu'il soit nécessaire d'imposer aux plans P_1 P_2 et P_3 P_4 les conditions définies par les relations (6).

L'introduction d'écarts réduits transformerait la relation (8) en relation (11), ε et σ y représentant alors les écarts réduits des cotes des points A et B.

L'emploi comme grandeurs d'entrée et de sortie des écarts de cote au lieu des cotes elles-mêmes, permet de choisir des plans de référence complètement arbitraires.

D'une façon générale, le choix comme grandeurs de régulation, des grandeurs elles-mêmes ou de leurs écarts, est un cas d'espèces.

Ces deux exemples montrent tout l'intérêt de l'emploi des grandeurs réduites.

6. Choix des notations

Il est opportun de faire choix de notations simples dont la signification soit quasi évidente. Nous utiliserons les minuscules latines pour représenter les grandeurs instantanées et les minuscules grecques pour représenter les grandeurs réduites. Dans ces conditions :

Les grandeurs	d'entrée	seront représentées par	e et ε
—	de sortie	—	s et σ
—	de réglage	—	r et ρ
—	réglées	—	g et γ
—	libres	—	l et λ

7. Simplifications apportées à la réalité physique des éléments constituant un circuit de régulation

L'examen des propriétés des éléments qui constituent un circuit de régulation montre que ces éléments ne jouissent généralement pas des propriétés des éléments linéaires.

Ceux qui utilisent des grandeurs électriques peuvent être géné-

ralement considérés comme tels dans leur domaine habituel d'utilisation ; par contre, les éléments qui mettent en œuvre d'autres fluides (vapeur, gaz, liquides) ne sont que très rarement linéaires dans l'ensemble de leur domaine habituel d'utilisation. Par exemple, les pertes de charge dans les tuyauteries sont fonctions linéaires du débit tant que la vitesse d'écoulement du fluide reste faible, mais les vitesses d'écoulement dans les appareils industriels sont telles qne les pertes de charge ne sont plus linéaires.

On peut cependant considérer comme linéaire un système qui ne l'est pas, à condition de se limiter à de petites variations autour d'un état de référence.

Or, les phénomènes de régulation rentrent assez facilement dans ce cadre limitatif, et leur mise en équation sous forme d'équations linéaires constitue une approximation pas trop éloignée de la réalité.

Cette approximation nous permettra de procéder à un examen d'ensemble des propriétés du circuit de régulation.

SECONDE PARTIE

Etude du circuit de régulation canonique d'une seule grandeur

Un tel circuit se compose d'une seule chaîne fermée où il existe nécessairement :

— une grandeur libre,
— une grandeur à régler,
— une grandeur de réglage.

Ces différentes grandeurs sont contenues dans deux éléments réunis bout à bout :

Un élément semi-libre dont :

la grandeur à régler est la grandeur de sortie,
la grandeur de réglage est la grandeur d'entrée
et sur lequel agit la grandeur libre.

Physiquement cet élément constitue la machine à régler.

Un élément dépendant dont :

la grandeur d'entrée est la grandeurà régler ;
la grandeur de sortie est la grandeur de réglage.

Physiquement cet élément constitue le régulateur.

Le comportement de chaque élément est représenté par une équation différentielle linéaire dont nous supposerons les coefficients constants dans le domaine de variation des différentes grandeurs.

1. Mise en équation du circuit de régulation canonique d'une seule grandeur

a) Elément semi-libre :

Soient :

ρ, γ et λ les valeurs réduites de la grandeur de réglage, de la grandeur réglée et de la grandeur libre.

La grandeur de réglage permet de doser les échanges d'énergie dont l'élément semi-libre est le siège.

Dans l'hypothèse de phénomènes linéaires sans retards, le comportement de l'élément semi-libre est représenté par une équation différentielle dont la forme est :

$$\rho = f_1(\gamma\ \gamma'\ \gamma''\ldots\ \lambda\ \lambda'\ \lambda''\ldots) \qquad (12)$$

L'ordre du second membre dépendant de la manière dont la grandeur de réglage ρ permet de doser les échanges d'énergie.

1er *exemple.*

Chauffage d'une enceinte au moyen d'un fluide à la température θ_f. La température extérieure à l'enceinte θ_o jouant le rôle de grandeur libre. Grandeur réglée : température de l'enceinte θ, grandeur de réglage : débit du fluide r.

A l'instant t la quantité de chaleur fournie à l'enceinte pendant l'intervalle de temps Δt est :

$$Ar(\theta_f - \theta)\,\Delta t \qquad (13)$$

La quantité de chaleur perdue par l'enceinte pendant le même intervalle de temps est :

$$B\,(\theta - \theta_o)\,\Delta t \qquad (14)$$

La quantité de chaleur emmagasinée dans les corps contenus dans l'enceinte (solides, liquides ou gaz) pendant le même intervalle de temps Δt est :

$$C(\theta_{t+\Delta t} - \theta_t) \qquad (15)$$

Ecrivons que la quantité de chaleur fournie est égale à la somme de la quantité de chaleur perdue et de la quantité de chaleur emmagasinée :

$$Ar(\theta_f - \theta)\,\Delta t = B(\theta - \theta_o)\Delta t + C(\theta_{t+\Delta t} - \theta_t) \qquad (16)$$

En divisant par Δt et en faisant tendre ce dernier vers zéro, il vient :

$$Ar(\theta_f - \theta) = B(\theta - \theta_o) + C\frac{d\theta}{dt} \qquad (17)$$

Si la différence $(\theta_f - \theta)$ reste pratiquement constante malgré de petites variations de θ, ce qui suppose que θ_f est nettement plus élevée que θ, la différence $\theta_f - \theta$ peut être considérée comme une constante et le comportement de l'élément semi-libre considéré est défini par la relation :

$$Dr = B(\theta - \theta_o) + C\frac{d\theta}{dt} \qquad (18)$$

La relation générale (12) prend alors la forme particulière

$$\rho = f_1(\gamma\,\gamma'\,\lambda) \qquad (19)$$

2e *exemple.*

Groupe turbo-alternateur alimentant un réseau isolé.

Le couple moteur est fonction de la vitesse et du degré d'ouverture des organes d'admission. Le coupe résistant est fonction de la vitesse et d'une grandeur libre : le paramètre de charge de la clientèle.

La grandeur de réglage choisie est le déplacement du tiroir qui commande le servo-moteur des organes d'admission.

La grandeur réglée est la vitesse.

Equation de la partie tournante

$$I\frac{d^2\omega}{dt^2} + \frac{dC_r}{dt} = \frac{dC_m}{dt} \qquad (20)$$

Compte tenu des hypothèses qui viennent d'être énoncées

$$\left.\begin{array}{l} \text{couple résistant} = C_r\,(\omega,\, l) \\ \text{coule moteur} = C_m\,(\omega,\, z) \\ z = \text{degré d'ouverture des organes} \\ \quad \text{d'admission} \end{array}\right\} \qquad (21)$$

Il en résulte :

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{dC_r}{dt} = \dfrac{\partial C_r}{\partial \omega}\dfrac{d\omega}{dt} + \dfrac{\partial C_r}{\partial l}\dfrac{dl}{dt} \\ \dfrac{dC_m}{dt} = \dfrac{\partial C_m}{\partial \omega}\dfrac{d\omega}{dt} + \dfrac{\partial C_m}{\partial z}\dfrac{dz}{dt} \\ \dfrac{dz}{dt} = Ar \end{array}\right\} \qquad (22)$$

En substituant dans (20)

$$I\frac{d^2\omega}{dt^2}+\left(\frac{\partial C_r}{\partial\omega}-\frac{\partial C_m}{\partial\omega}\right)\frac{d\omega}{dt}+\frac{\partial C_r}{\partial l}\frac{dl}{dt}=Ar \quad (23)$$

pour de petites variations de la vitesse et de la grandeur libre, les dérivées partielles peuvent être considérées comme des constantes. Le comportement de l'élément semi-libre considéré est alors défini par une équation du 2e ordre à coefficients constants, et 12 prend la forme particulière

$$\rho = f_1(\gamma'\ \gamma''\ \lambda') \quad (24)$$

b) Elément dépendant.

Soient :

ε et σ les valeurs réduites des grandeurs d'entrée et de sortie de l'élément dépendant.

Cet élément, qui joue le rôle de régulateur, établit entre ε et σ, dans le cas général, une relation de forme :

$$f_2(\varepsilon\ \varepsilon'\ \varepsilon''\ldots) = f_3\ (\sigma\ \sigma'\ \sigma''\ldots) \quad (25)$$

Fréquemment la relation 16 se simplifie et prend la forme

$$\sigma = f_2(\varepsilon\ \varepsilon'\ \varepsilon''\ldots) \quad (26)$$

ou

$$\varepsilon = f_3(\sigma\ \sigma'\ \sigma''\ldots) \quad (27)$$

Exemples :

1° Régulateur tachymétrique :

force due à la rotation du système mobile

$$A(\omega_o+\omega-\omega_o)^2 = A\omega_o^2 + 2A\omega_o\ (\omega-\omega_o) + A(\omega-\omega_o)^2 \quad (28)$$

pour de petites variations de ω autour de ω_o le dernier terme est négligeable.

force nécessaire au déplacement de la partie mobile

$$B\frac{d^2S}{dt^2} + CS \quad (29)$$

force d'inertie - tension d'un ressort 28 et 29 se font équilibre. En posant $S = S_o + s$ et en remarquant que S_o est le déplacement correspondant à la vitesse ω_o ce qui entraîne $CS_o = A\omega_o^2$ il vient :

$$2A\omega_o\ (\omega - \omega_o) = B\frac{d^2s}{dt^2} + Cs \qquad (30)$$

La relation (25) prend la forme particulière

$$\varepsilon = f_3(\sigma\ \sigma'') \qquad (31)$$

2° Régulateur tachy-accélérométrique.

On ajoute au régulateur précédent un accéléromètre produisant un déplacement d proportionnel à $\frac{d\omega}{dt}$ et l'on fait la somme des déplacements s et d.

On a en représentant l'écart de vitesse $\omega - \omega_o$ par e (grandeur d'entrée).

$$De = B\frac{d^2s}{dt^2} + Cs \quad \text{(régulateur tachymétrique)}$$

ou :

$$e = E\frac{d^2s}{dt^2} + Fs \qquad (32)$$

$$G\frac{de}{dt} = d \quad \text{(accéléromètre)} \qquad (33)$$

$$S = s + d \qquad (34)$$

S = nouvelle grandeur de sortie.

On peut écrire successivement

$$Fs = e - E\frac{d^2s}{dt^2}$$

$$Fd = G\frac{de}{dt}$$

$$F(s + d) = FS = e + G\frac{de}{dt} - E\frac{d^2s}{dt^2}$$

Or :

$$E\frac{d^2s}{dt^2} = E\frac{d^2S}{dt^2} - E\frac{d^2}{dt^2}(d) = E\frac{d^2S}{dt^2} - \frac{EG}{F}\frac{d^3e}{dt^3}$$

D'où :

$$FS = e + G\frac{de}{dt} - E\frac{d^2s}{dt^2} + \frac{EG}{F}\frac{d^3e}{dt^3}$$

$$e + G\frac{de}{dt} + \frac{EG}{F}\frac{d^3e}{dt^3} = FS + E\frac{d^2S}{dt^2} \qquad (35)$$

et la relation (16) prend la forme particulière

$$f_2(\varepsilon\ \varepsilon'\ \varepsilon''') = f_3(\sigma\ \sigma'') \qquad (36)$$

c) Connexion de l'élément semi-libre et de l'élément dépendant.

La grandeur de sortie σ de l'élément dépendant s'identifie à la grandeur de réglage ρ de l'élément semi-libre lorsque la sortie du premier élément est réunie à l'entrée du second.

Les relations (12) et (25) se fondent en une seule relation entre $\gamma\,\lambda$ et ε de forme

$$g(\gamma\,\gamma'\,\gamma''\ldots\,\lambda\,\lambda'\,\lambda''\ldots) = h(\varepsilon\,\varepsilon'\,\varepsilon''\ldots) \qquad (37)$$

qui représente le comportement de la chaîne de régulation *ouverte.*

La fermeture de cette chaîne par la réunion de la sortie de l'élément semi-libre à l'entrée de l'élément dépendant, entraîne l'identité de la grandeur réglée γ et de la grandeur d'entrée ε de l'élément dépendant. La relation 37 se transforme en une nouvelle relation entre γ et λ de forme

$$k(\gamma\,\gamma'\,\gamma''\ldots\,\lambda\,\lambda'\,\lambda''\ldots) = 0 \qquad (38)$$

38 représente le comportement du circuit de régulation canonique d'une seule grandeur pendant les opérations de réglage.

Toutes les opérations de réglage sont donc des solutions de l'équation (38).

Remarque I.

Si le circuit de régulation comporte plusieurs éléments dépendants mis bout à bout au lieu d'un seul, la forme des équations 25, 37 et 38 n'est pas modifiée.

En effet, si

$\varepsilon_1\,\varepsilon_2\ldots$ sont les grandeurs d'entrée des éléments dépendants 1, 2...

$\sigma_1\,\sigma_2\ldots$ sont les grandeurs de sortie de ces mêmes éléments.

chacun d'eux est caractérisé par une relation de forme 25

$$f_1(\varepsilon_1\,\varepsilon'_1\,\varepsilon''_1\ldots) = f'_1(\sigma_1\,\sigma'_1\,\sigma''_1\ldots) \text{ pour l'élément 1}$$
$$f_2(\varepsilon_2\,\varepsilon'_2\,\varepsilon''_2\ldots) = f'_2(\sigma_2\,\sigma'_2\,\sigma''_2\ldots) \text{ pour l'élément 2}$$

La réunion de ces éléments conduit à identifier σ_1 et ε_2, σ_2 et $\varepsilon_3\ldots$ finalement l'ensemble peut être représenté par une relation

$$f(\varepsilon_1\,\varepsilon'_1\,\varepsilon''_1\ldots) = f'(\sigma_n\,\sigma'_n\,\sigma''_n\ldots) \qquad (39)$$

qui a bien la même forme que (25), par conséquent les formes de 37 et 38 demeurent inchangées.

Remarque 2.

Dans l'hypothèse de la régulation linéaire, les fonctions g et h sont des fonctions linéaires de $\gamma\gamma'\gamma''\ldots$ $\lambda\lambda'\lambda''\ldots$ pour la première et de $\varepsilon\varepsilon'\varepsilon''\ldots$ pour la seconde; leurs coefficients peuvent être considérés comme constants dans un domaine restreint de variation des différentes grandeurs.

Les équations fondamentales 37 et 38 prennent alors les formes suivantes :

$$A_o \frac{d^n\gamma}{dt^n} + \ldots + A_n\gamma + C_o \frac{d^p\lambda}{dt^p} + \ldots + c_p\lambda = B_o \frac{d^m\varepsilon}{dt^m} + \ldots + B_m\varepsilon \quad (40)$$

$$A_o \frac{d^n\gamma}{dt^n} + \ldots + (A_{n-m} - B_o) \frac{d^m\gamma}{dt^m} + \ldots + (A_n - B_n)\gamma + C_o \frac{d^p\lambda}{dt^p} + \ldots + C_p\lambda = 0 \quad (41)$$

où n, m et p ont généralement des valeurs différentes.

Le problème essentiel, dans l'étude du circuit de régulation, est la recherche des conditions de stabilité : il faut donc rechercher si l'équation 41 n'admet pas des solutions croissant indéfiniment en fonction du temps, auquel cas le circuit de régulation sera stable.

Il nous faut donc savoir si les racines de l'équation caractéristique de 41 comportent ou non des parties réelles positives (les termes en $\lambda\lambda'\ldots$ y jouent le rôle d'un second membre).

Les méthodes classiques d'Hurwitz et de Roots permettent de résoudre ce problème lorsque l'équation (41) est formée. Il semblerait donc que l'étude de la stabilité du circuit de régulation ne soulève aucun problème nouveau.

Or, cette façon d'examiner la stabilité d'une manière « Globale » cadre mal avec les données courantes du problème : en effet, l'équation (41) n'est généralement pas formée. On ne connaît que les équations particulières à chaque élément du circuit de régulation que l'on se propose de former et l'on désire se rendre compte de l'influence de certains paramètres sur la stabilité du circuit.

Une méthode opérant par compositions successives d'expressions caractéristiques de chaque élément du circuit de régulation serait beaucoup plus intéressante car elle permettrait :

1° de se rendre compte de l'effet produit par l'adjonction d'un nouvel élément et de définir les caractéristiques d'un élément pour qu'il modifie d'une façon déterminée les propriétés globales d'un circuit de régulation donné ;

2° de déduire des relevés expérimentaux des expressions caractéristiques de chaque élément composant les conditions de stabilité du circuit de régulation tout entier.

2. Choix de l'expression caractéristique d'un élément. Rapport de transmission d'un élément.

Dès que l'on considère un circuit de régulation comme formé d'une suite d'éléments mis bout à bout, le rôle de chacun d'eux consiste à transmettre à l'élément qui le suit la perturbation qu'il a reçue de l'élément précédant, après l'avoir modifié de telle façon qu'elle satisfasse à ses propres conditions de fonctionnement.

On peut donc concevoir un *rapport de transmission* propre à chaque élément comme le rapport de la grandeur de sortie de cet élément à la grandeur d'entrée.

Bien entendu, la forme de ce rapport peut dépendre de la grandeur d'entrée.

Le rapport de transmission d'un élément revêt un caractère particulièrement intuitif dans le cas d'une grandeur d'entrée sinusoïdale.

Si $\bar{\varepsilon}$ et $\bar{\sigma}$ représentent les grandeurs réduites d'entrée et de sortie d'un élément sous la forme de quantités complexes $\bar{\varepsilon} = \varepsilon\, e^{j\omega t}$ $\bar{\sigma} = \sigma\, e^{j\omega t}$, les deux éléments dépendants particulièrement simples que nous avons examinés dans la première partie : le levier simple et le levier à dash pot et dont le fonctionnement est défini par les relations

$$\varepsilon = \sigma \qquad \text{(3) levier simple}$$

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{1}{T_E}\sigma + \frac{d\sigma}{dt} \qquad \text{(11) levier à dash pot}$$

auraient pour rapport de transmission en régime sinusoïdal :

levier simple $\qquad \dfrac{\bar{\sigma}}{\bar{\varepsilon}} = 1 \qquad (42)$

levier à dash pot $$\frac{\bar{\sigma}}{\bar{\varepsilon}} = \frac{j\omega}{\frac{1}{T_E} + j\omega} = \frac{1}{1 + \frac{1}{j\omega T_E}} \quad (43)$$

Les expressions (42) et (43) permettent de calculer le rapport de transmission de ces deux leviers, en régime sinusoïdal, pour toute valeur de la pulsation ω.

Pour définir le rapport de transmission d'un élément d'une manière plus générale, nous appliquerons la transformation de Laplace (1) aux équations du chapitre précédent, et nous définirons le rapport de transmission d'un élément comme le *rapport des transformées de ses grandeurs de sortie et d'entrée lorsque cet élément part du repos.*

$$P = \left(\frac{T(\sigma)}{T(\varepsilon)} \right)_0 \quad (44)$$

La notation $(\ )_0$ signifiant que, dans les expressions des transformées, les différentes grandeurs et leurs dérivées partent de zéro.

Cas de l'élément semi-libre.

Le comportement d'un tel élément est défini par la relation :

$$\rho = f_1 (\gamma\, \gamma'\, \gamma'' \ldots \lambda\, \lambda'\, \lambda'' \ldots) \quad (12)$$

où f_1 est une fonction linéaire à coefficients constants.

L'application de la transformation de Laplace transforme cette relation qui devient :

$$T(\rho) = \varphi_\gamma(p)\, T(\gamma) - \psi_\gamma (p\, \gamma_0\, \gamma'_0 \ldots \gamma_0^{n-1}) + \\ + \varphi_\lambda(p)\, T(\lambda) - \psi_\lambda (p\, \lambda_0\, \lambda', \ldots \lambda_0^{p-1}) \quad (45)$$

ce qui peut s'écrire en posant d'après (44) $P_L = \frac{1}{\varphi_\gamma}$

$$T(\rho) = \frac{I}{P_L} T(\gamma) + [\, \varphi_\lambda\, T(\lambda) - \psi_\gamma - \psi_\lambda \,]$$

En représentant par $[\, I \,]_L$ la transformée de l'effet des conditions initiales et de l'évolution de la grandeur libre :

$$T(\rho) = \frac{1}{P_L} T(\gamma) + [\, I \,]_L \quad (46)$$

---

(1) Les propriétés de la transformation de Laplace utilisées dans ce travail font l'objet d'une note complémentaire, p. 114.

Cette dernière relation peut être représentée par le schéma suivant qui est le schéma type de l'élément semi-libre :

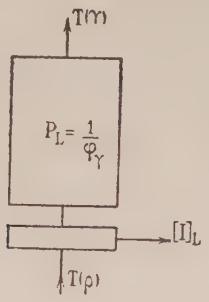


FIG. 5.

Cas de l'élément dépendant :

Le comportement d'un tel élément est défini par la relation :

$$f_2(\varepsilon\ \varepsilon'\ \varepsilon''\ \ldots) = f_3(\sigma\ \sigma'\ \sigma''\ldots) \qquad (25)$$

où f_2 et f_3 sont des fonctions linéaires à coefficients constants.

L'application de la transformation de Laplace transforme cette relation qui devient :

$$\varphi_\varepsilon(p)\,T(\varepsilon) - \psi_\varepsilon(p\,\varepsilon_0\,\varepsilon'_0\,\varepsilon_0{}^{n-1}) = \varphi_\sigma(p)\,T(\sigma) - \psi_\sigma(p\,\sigma_0\,\sigma_0{}'\ldots\sigma_0{}^{n-1}) \quad (47)$$

en posant, d'après (44)

$$P_D = \frac{\varphi_\varepsilon}{\varphi_\sigma}$$

$$T(\sigma) = P_D\,T(\varepsilon) - \frac{\psi_\varepsilon - \psi_\sigma}{\varphi_\sigma}$$

ce qui peut s'écrire en représentant par $[\,I\,]_D$ la transformée de l'effet des conditions initiales :

$$T(\sigma) = P_D\,T(\varepsilon) - \frac{[\,I\,]_D}{\varphi_\sigma} \qquad (48)$$

Cette dernière relation peut être représentée par le schéma suivant qui est le schéma type de l'élément dépendant.

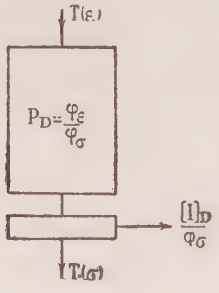


FIG. 6.

3. Transformation des équations canoniques de la chaîne et du circuit de régulation d'une seule grandeur. Formation de l'équation transformée par composition des rapports de transmission.

Le comportement de la chaîne de régulation ouverte entre la grandeur de sortie de l'élément semi-libre et la grandeur d'entrée de l'élément dépendant est représenté par la relation.

$$g\,(\gamma\,\gamma'\,\gamma''\,\ldots\,\lambda\,\lambda'\,\lambda''\ldots) = h\,(\varepsilon\,\varepsilon'\,\varepsilon''\ldots) \qquad (37)$$

où g et h sont des fonctions linéaires à coefficients constants.

La transformation de Laplace transforme cette relation qui devient :

$$\varphi_{g\gamma}(p)\,\mathrm{T}(\gamma) - \psi_{g\gamma}\,(p\,\gamma_0\,\gamma'_0 \ldots \gamma_0{}^{n-1}) + \varphi_{g\lambda}(p)\,\mathrm{T}(\lambda) - \psi_{g\lambda}\,(p\,\lambda'_0\,\lambda_0 \ldots \lambda_0{}^{p-1}) = \\ = \varphi_{h\varepsilon}(p)\,\mathrm{T}(\varepsilon) - \psi_{h\varepsilon}\,(p\,\varepsilon_0\,\varepsilon'_0 \ldots \varepsilon_0{}^{m-1}) \qquad (49)$$

ce qui peut s'écrire, en mettant entre crochets tout ce qui se rapporte aux conditions initiales et à la grandeur libre :

$$\varphi_{g\gamma}\,\mathrm{T}(\gamma) = \varphi_{h\varepsilon}\,\mathrm{T}(\varepsilon) + [\,\psi_{g\gamma} - \psi_{h\varepsilon} - \varphi_{g\lambda}\,\mathrm{T}(\lambda) + \psi_{g\lambda}\,] \qquad (50)$$

La fermeture de la chaîne de régulation entraîne l'identité

$$\varepsilon \equiv \gamma \text{ ou } \mathrm{T}(\varepsilon) \equiv \mathrm{T}(\gamma)$$

il en résulte que le comportement du circuit de régulation, observé à travers la grandeur réglée se trouve défini par :

$$(\varphi_{g\gamma} - \varphi_{h\varepsilon})\,\mathrm{T}(\gamma) = [\,\psi_{g\gamma} - \psi_{h\varepsilon} - \varphi_{g\lambda}\,\mathrm{T}(\lambda) + \psi_{g\lambda}\,] \qquad (51)$$

ou encore :

$$\mathrm{T}(\gamma) = \frac{[\,\psi_{g\gamma} - \psi_{h\varepsilon} - \varphi_{g\lambda}\,\mathrm{T}(\lambda) + \psi_{g\lambda}\,]}{\varphi_{g\gamma} - \varphi_{h\varepsilon}} \qquad (52)$$

Tout le comportement du circuit de régulation se trouve contenu dans (52). Le caractère de la perturbation, conditions initiales et évolution de la grandeur libre est représenté par le numérateur du second membre de 52. S'il n'y avait pas perturbation, ce numérateur serait nul et l'on aurait identiquement :

$$\mathrm{T}(\gamma) \equiv 0 \qquad \gamma \equiv 0$$

La grandeur réglée resterait à sa valeur de consigne.

Introduisons maintenant les rapports de transmission des éléments semi-libre et dépendant qui constituent le circuit de régulation.

Le comportement propre de ces éléments est défini par les relations :

$$T(\rho) = \frac{1}{P_L} T(\gamma) + [I]_L \qquad (46)$$

pour l'élément semi-libre, et

$$T(\sigma) = P_D T(\varepsilon) + \frac{[I]_D}{\varphi_\sigma} \qquad (48)$$

pour l'élément dépendant

La mise bout à bout de ces deux éléments afin de former un circuit de régulation, entraîne les deux identités

$$\gamma \equiv \varepsilon \qquad \text{ou } T(\gamma) \equiv T(\varepsilon)$$
$$\sigma \equiv \rho \qquad \text{ou } T(\sigma) \equiv T(\rho)$$

En combinant les deux relations 46 et 48, et en tenant compte de ces identités, il vient :

$$P_D T(\gamma) - \frac{[I]_D}{\varphi_\sigma} = \frac{1}{P_L} T(\gamma) + [I]_L$$

ou encore :

$$T(\gamma) = \frac{[I]_L + \dfrac{[I]_D}{\varphi_\sigma}}{P_D - \dfrac{1}{P_L}} \qquad (53)$$

Cette relation définit également le comportement du circuit de régulation à travers sa grandeur réglée ; elle est équivalente à la relation 52, mais introduit les rapports de transmission de l'élément semi-libre et de l'élément dépendant

Remarquons au passage que l'expression $\frac{[I]_D}{\varphi_\sigma}$ représente la transformée de l'effet des conditions initiales de l'élément dépendant, *ramené* au point du circuit où σ et ρ sont confondus.

Les représentations schématiques de l'élément semi-libre et de l'élément dépendant que nous avons vues au paragraphe précédent, se combinent à leur tour pour constituer la représentation schématique du circuit de régulation canonique d'une seule grandeur. Le

schéma ci-dessous est le schéma type du circuit de régulation canonique d'une seule grandeur.

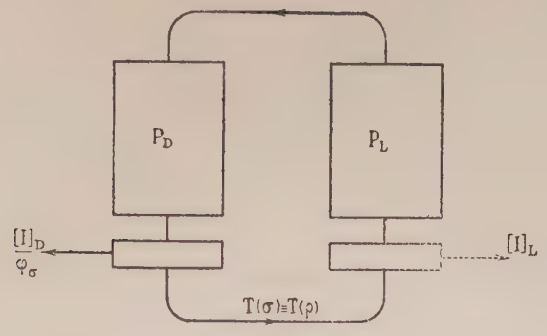


FIG. 7.

Remarque. — La transformée $T(\gamma)$ de la grandeur réglée peut se mettre sous une forme légèrement différente en multipliant numérateur et dénominateur de (53) par P_L et en tenant compte des égalités

$$P_L = \frac{1}{\varphi_\gamma}$$

$$\frac{P_L}{\varphi_\sigma} = \frac{1}{\varphi_\gamma \varphi_\sigma}$$

il vient

$$T(\gamma) = \frac{\varphi_\sigma [\,I\,]_L + [\,I\,]_D}{\varphi_\gamma \varphi_\sigma (P_L P_D - 1)} \qquad (54)$$

4. Conditions de stabilité du circuit de régulation d'une seule grandeur.

Le comportement du circuit de régulation pendant les opérations de réglage, vu à travers sa grandeur réglée, est représentée par la fonction $\gamma(t)$ original de la transformée $T(\gamma)$ définie par (53) ou (54).

En explicitant $[\,I\,]_L$ et $[\,I\,]_D$ cette fonction a pour expression :

$$T(\gamma) = \frac{\varphi_\sigma(\varphi_\lambda T(\lambda) - \psi_\gamma - \psi_\lambda) + (\psi_\varepsilon - \psi_\sigma)}{\varphi_\gamma \varphi_\sigma (P_L P_D - 1)} \qquad (55)$$

Son dénominateur a d'ailleurs pour expression développée

$$\varphi_\varepsilon - \varphi_\gamma \varphi_\sigma$$

Nous supposons qu'à l'instant $t = 0$ la grandeur libre λ subisse une certaine évolution caractérisée par une transformée

$$T(\lambda) = \frac{A(p)}{B(p)}$$

(A et B étant des polynomes).

Par exemple, si la grandeur libre subit un saut brusque $\frac{A(p)}{B(p)}$ se réduit à $\frac{A}{p}$ A étant une constante qui représente la nouvelle valeur de λ après variation.

La transformée de γ devient alors :

$$T(\gamma) = \frac{\varphi_\sigma(\varphi_\lambda A(p) - B(p)(\psi_\gamma + \psi_\lambda)) + B(p)(\psi_\varepsilon - \varphi_\sigma)}{B(p)\,\varphi_\gamma\,\varphi_\sigma(P_L P_D - 1)} \qquad (56)$$

$T(\gamma)$ se présente sous la forme d'une fraction rationnelle en p le degré de son numérateur étant généralement inférieur à celui de son dénominateur.

On sait alors que $\gamma(t)$ est formé d'une suite d'exponentielle dont les exposants, sont les produits par t des racines du dénominateur égalé à zéro si ces racines sont simples et du produit d'un polynome par une exponentielle dans le cas de racine multiple, le degré du polynome étant inférieur d'une unité à l'ordre de multiplicité de la racine considérée.

D'après la forme même du dénominateur de 56, les racines de ce polynome égalé à zéro sont :

1° les racines de $B(p) = 0$;

2° les racines de $\Delta = \varphi_\gamma\varphi_\sigma(P_L P_D - 1) = \varphi_\varepsilon - \varphi_\gamma\varphi_\sigma = 0$.

Les premières vont définir l'état final tel qu'il résulte de l'évolution de la grandeur libre. Les secondes définissent le régime transitoire qui apparaît dès l'évolution de la grandeur libre.

Pour que le circuit de régulation soit stable, il faut que le régime transitoire soit amorti, c'est-à-dire qu'aucun exposant des exponentielles ne doit avoir de partie réelle positive.

Nous considérerons donc le circuit de régulation comme stable, indépendamment de l'évolution de la grandeur libre, lorsque aucune racine de $\Delta = \varphi_\varepsilon - \varphi_\gamma\varphi_\sigma = 0$ ne se trouve dans le demi-plan positif.

Nous sommes donc conduits à rechercher les moyens de déceler si le demi-plan positif contient ou ne contient pas de racines de $\Delta = 0$ sans qu'il soit nécessaire de calculer ces racines.

Considérons un polynôme en p :

$$\varphi(p) = (p - a)(p - b)(p - c)\ldots(p - n)$$

ont les racines sont a, $b\ldots$ n. Lorsque la variable complexe p décrit un contour fermé, l'argument de $\varphi(p)$ revient à sa détermination initiale chaque fois que le contour ne contient aucune des racines a, $b\ldots n$. Dans le cas contraire, l'argument de $\varphi(p)$ augmente de $2\,K\pi$, K étant la somme des ordres de multiplicité des racines comprises dans le contour.

Choisissons un contour qui entoure le demi-plan positif.

Un tel contour comprend : (contour de Bromwhich) l'axe des i de $+\,i\infty$ à $-\,i\infty$

un demi-cercle de rayon infiniment grand qui joint le point $-\,i\infty$ au point $+\,i\infty$.

Chaque fois que l'argument de Δ reviendra à sa détermination initiale, lorsque p décrit le contour de Bromwhich, nous serons assurés qu'aucune racine de $\Delta = 0$ ne se trouve dans le demi-plan positif.

Pour que l'argument de Δ revienne à sa détermination initiale, il faut et il suffit que le point figuratif de Δ, dans le plan complexe, n'entoure pas l'origine lorsque p décrit le contour de Bromwhich.

1re MÉTHODE. — *Explicitons* Δ.

Si nous connaissons les trois polynômes φ_ε, φ_γ, φ_σ, nous pourrons former Δ et déterminer son lieu figuratif lorsque p décrit le contour de Bromwhich.

Si ce lieu entoure l'origine, le circuit est instable, car il existe au moins une racine de $\Delta = 0$ dans le demi-plan positif.

Dans le cas contraire, le circuit est stable, aucune racine de $\Delta = 0$ dans le demi-plan positif.

La condition de stabilité s'exprime donc sous la forme suivante :

« Pour que le circuit de régulation soit stable, le lieu figuratif de la fonction $\Delta = \varphi_\varepsilon - \varphi_\gamma\,\varphi_\sigma$ ne doit pas entourer l'origine lorsque la variable complexe p décrit le contour de Bromwhich. »

Cette condition n'est autre que la condition de Leonhard (1), elle nécessite la connaissance analytique des trois polynômes φ_ε, φ_γ, φ_σ ce qui n'est pas toujours réalisé.

---

(1) *Archiv. für electrotechnik*, janvier-février 1944. Neues Verfahren zur Stabilitätsuntersuchung, H. Leonhar d.

2e MÉTHODE. — *Supposons que* φ_γ, φ_σ *n'aient pas de zéros dans le demi-plan positif*

et conservons Δ sous la forme $\Delta = \varphi_\gamma \varphi_\sigma (P_L P_D - 1)$

φ_γ et φ_σ n'ayant, par hypothèse, aucun zéro dans le demi-plan positif, Δ deviendra à sa détermination initiale lorsque p décrit le contour de Bromwhich si $(P_L P_D - 1)$ revient à la sienne. Or, le produit $P_L P_D$ représente le rapport de transmission résultant P de la chaîne ouverte constituée par l'élément dépendant et l'élément semi-libre réunis l'un à l'autre par la grandeur de sortie du premier et la grandeur d'entrée du second.

Pour que $(P - 1)$ revienne à sa détermination initiale, le point figuratif de $(P - 1)$ ne doit pas entourer l'origine, ou, ce qui revient au même, le lieu figuratif de P ne doit pas entourer le point $+1$ du plan complexe lorsque p décrit le contour de Bromwhich.

Dans l'hypothèse restrictive où φ_γ et φ_σ n'ont pas de zéro dans le demi-plan positif, la condition de stabilité du circuit de régulation canonique d'une seule grandeur, s'identifie au critère de Nyquist (1) établi à propos de l'étude des amplificateurs à réaction.

Dans ces systèmes, la grandeur d'entrée de l'amplificateur est la somme d'une grandeur imposée, extérieure au système, et d'une fraction complexe de la grandeur de sortie, ce qui constitue un circuit de régulation.

Il est donc naturel de retrouver le critère de Nyquist comme condition de stabilité du circuit de régulation satisfaisant aux mêmes conditions restrictives que les systèmes à amplificateurs à réactions.

Il arrive, d'ailleurs, que certains sytèmes d'amplificateurs à réaction ne satisfassent pas aux conditions restrictives indiquées. Le critère de Nyquist ne leur est pas applicable.

Physiquement, les conditions restrictives, φ_γ et φ_σ n'ont aucun zéro dans le demi-plan positif, signifient que l'élément semi-libre et l'élément dépendant sont stables en eux-mêmes, c'est-à-dire qu'il n'existe aucune valeur de la grandeur complexe p à partie réelle positive qui rende infinis les rapports de transmission P_L et P_D.

---

(1) *Bell technical journal*, janvier 1932. Regeneration Theory, H. Nyquist.

Nous pouvons donc condenser ce qui précède dans la proposition suivante :

« Le circuit de régulation canonique d'une seule grandeur composée d'un élément semi-libre et d'un élément dépendant stables en eux-mêmes, est stable lorsque le lieu figuratif du rapport de transmission résultant $P = P_L P_D$ n'entoure pas le point $+ 1$ du plan complexe lorsque p décrit le contour de Bromwhich. »

3° Nouvelle méthode.

Nous ne supposons plus *a priori* que l'élément dépendant et l'élément semi-libre soient stables en eux-mêmes, c'est-à-dire que φ_γ et φ_σ n'aient aucun zéro dans le demi-plan positif et nous nous proposons de déduire la condition de stabilité du circuit de régulation canonique d'une seule grandeur du comportement relatif des fonctions P_D et $\frac{1}{P_L}$ lorsque p décrit le contour de Bromwhich.

Pour cela, remarquons que le dénominateur Δ peut s'écrire :

$$\Delta = \varphi_\sigma \left(P_D - \frac{1}{P_L} \right) \qquad (57)$$

La variation d'argument de Δ est égale à la somme des variations d'argument de φ et de $\left(P_D - \frac{1}{P_L} \right)$.

Pour que la variation d'argument de Δ soit nulle, il faut et il suffit que la variation d'argument de $\left(P_D - \frac{1}{P_L} \right)$ soit égale et opposée à celle de φ_σ.

Soit K_D la somme des ordres de multiplicité des racines de $\varphi_\sigma = 0$ contenues dans le demi-plan positif. La variation d'argument de φ_σ lorsque p décrit le contour de Bromwhich est égale à $2\pi K_D$ il faut donc que la variation d'argument de $\left(P_D - \frac{1}{P_L} \right)$, lorsque p décrit le même contour soit égale à $- 2\pi K_D$.

Etudions séparément, au préalable, les rapports de transmission P_L et P_D.

Le rapport de transmission de l'élément dépendant peut être étudié analytiquement ou expérimentalement.

Si l'étude est faite analytiquement, on étudie séparément φ_ε et φ_σ.

Si l'étude est faite expérimentalement, il est indiqué de relever les lieux représentatifs de P_D et de $P'_D = \varphi_\varepsilon$ en bloquant, dans l'élément dépendant les organes qui introduisent la fonction φ_σ.

On en déduit le lieu figuratif de P_D lorsque p décrit le contour de Bromwhich, ainsi que la somme K_D des ordres de multiplicité des racines de $\varphi_\sigma = 0$ contenues dans le demi-plan positif.

De même, l'étude expérimentale ou analytique du rapport de transmission P_L permet d'en déduire le point figuratif de $\frac{1}{P_L}$ lorsque p décrit le contour de Bromwhich.

Connaissant les lieux figuratifs de P_D et de $\frac{1}{P_L}$ ainsi que K_D il reste à en déduire la variation d'argument de $\left(P_D - \frac{1}{P_L}\right)$.

Etude de la variation d'argument de $\left(P_D - \frac{1}{P_L}\right)$.

Le contour de Bromwhich, décrit dans le sens positif, se compose de trois parties :

1° l'axe des i de 0 à $-i\infty$;

2° un demi-cercle de rayon infiniment grand joignant le point $-i\infty$ au point $+i\infty$;

3° l'axe des i de $+i\infty$ à 0.

Le lieu du point figuratif d'une fraction rationnelle en p étant connu pour la première partie du parcours, le lieu correspondant à la troisième partie sera le conjugué du premier ($-i$ changé en i) et le sens relatif de parcours y sera inversé.

Il en résulte que les variations d'argument du point figuratif seront égales et de même signe lorsque p décrit la première et la troisième partie du parcours.

Pour la seconde partie du parcours de Bromwhich, le lieu du point figuratif sera un point du plan complexe si les degrés du numérateur et du dénominateur sont égaux, un ensemble de demi-cercles à l'infini si le degré du numérateur l'emporte sur celui du dénominateur, un ensemble de demi-cercles infiniment voisins de l'origine dans le cas contraire.

L'étude de la variation d'argument $\left(P_D - \frac{1}{P_L}\right)$ se ramène donc

à l'étude du comportement relatif des lieux figuratifs de P_D et de $\frac{1}{P_L}$ pour les deux premières parties du contour de Bromwhich.

La première partie est la plus intéressante car les courbes représentant ces lieux sont susceptibles de se couper.

Examinons la variation d'argument de $\left(P_D - \frac{1}{P_L}\right)$ lors d'une intersection (fig. 8).

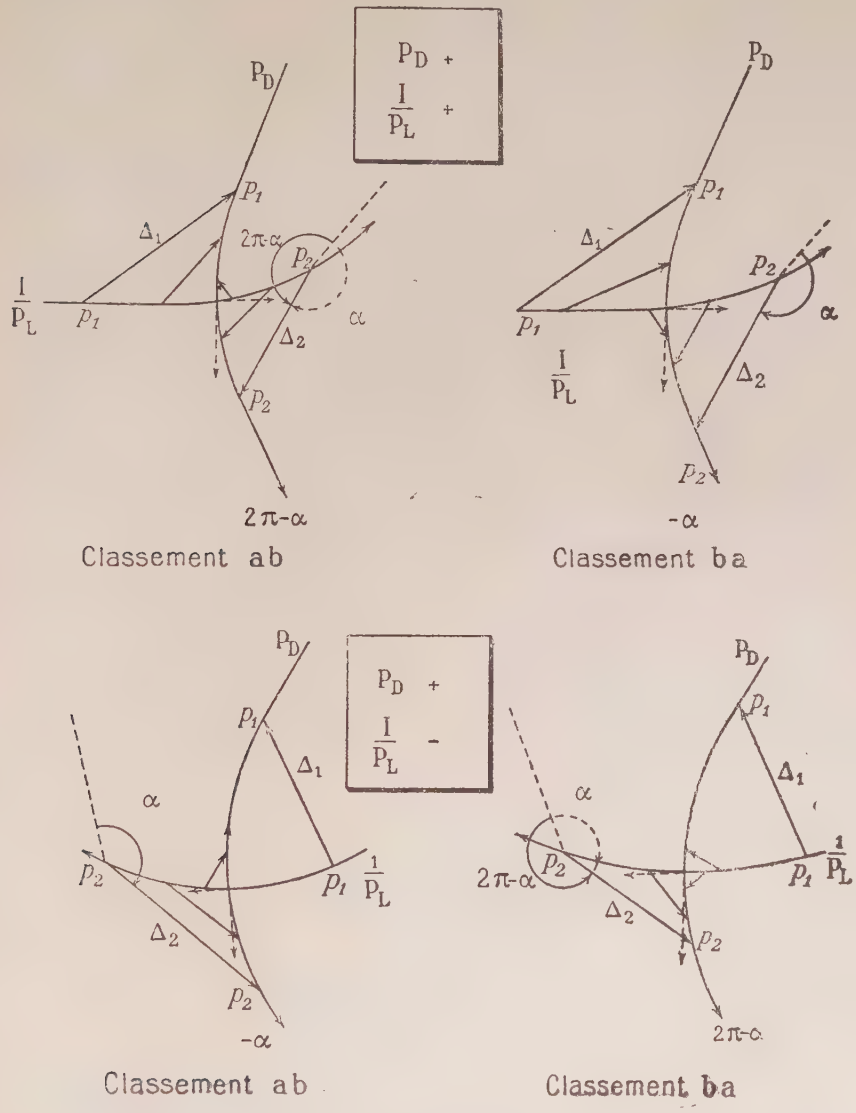


FIG. 8. — Variation d'argument de $\Delta = P_D - \frac{1}{P_L}$ autour d'un point d'intersection.

Soit $p_1\ p_2$ un intervalle de variation de p contenant un seul point d'intersection des lieux figuratifs de P_D et $\frac{1}{P_L}$.

p_a la valeur de p correspondant au point d'intersection sur $\frac{1}{P_L}$;

p_b la valeur de p correspondant au point d'intersection sur P_D.

$\theta = \theta_2 - \theta_1$ la différence apparente des arguments de $\left(P_D - \frac{1}{P_L}\right)$ comptée dans le sens trigométrique pour les valeurs p_2 et p_1 de p.

La variation d'argument de $\left(P_D - \frac{1}{P_L}\right)$ lorsque p varie de p_1 à p_2 est égale à $\theta + 2\,\alpha\pi$.

α pouvant prendre les trois valeurs 0, + 1, — 1 suivant les sens respectifs de parcours et le classement des valeurs de p, p_a et p_b dans l'intervalle $p_i\ p_2$.

Traçons les tangentes aux deux courbes passant par le point d'intersection et dirigées dans le sens du parcours (fig. 8) et orientons la figure de telle façon que la tangente au lieu représentatif de P_D soit verticale, soit dirigée vers le haut, soit dirigée vers le bas.

Repérons par le signe + la tangente dirigée vers le bas, par le signe — celle qui est dirigée vers le haut.

Ces signes correspondent aux sens positifs et négatifs de parcours de l'axe des i dans le contour de Bromwhich.

Ceci étant, repérons par le signe + la tangente au lieu représentatif de $\frac{1}{P_L}$ lorsque cette tangente est dirigée vers la droite, par le signe — dans le cas contraire.

Il y a quatre cas de figure possibles, en excluant le cas de deux courbes tangentes, correspondant aux combinaisons de signes

$$+\,+, \quad +\,-, \quad -\,+, \quad -\,-$$

Dans chaque cas, il y a lieu de distinguer le classement des valeurs de p_a et de p_b dans l'intervalle $p_1\ p_2$.

Ce classement peut être :

soit $p_1\ p_a\ p_b\ p_2$: nous le repérerons classement $a\ b$;
soit $p_1\ p_b\ p_a\ p_2$: nous le repérerons classement $b\ a$.

Dans ces conditions, la variation d'argument de $\left(P_D - \frac{1}{P_L}\right)$ autour d'un point d'intersection se déduit des huit cas de la figure 9 et peut être résumée dans le tableau suivant :

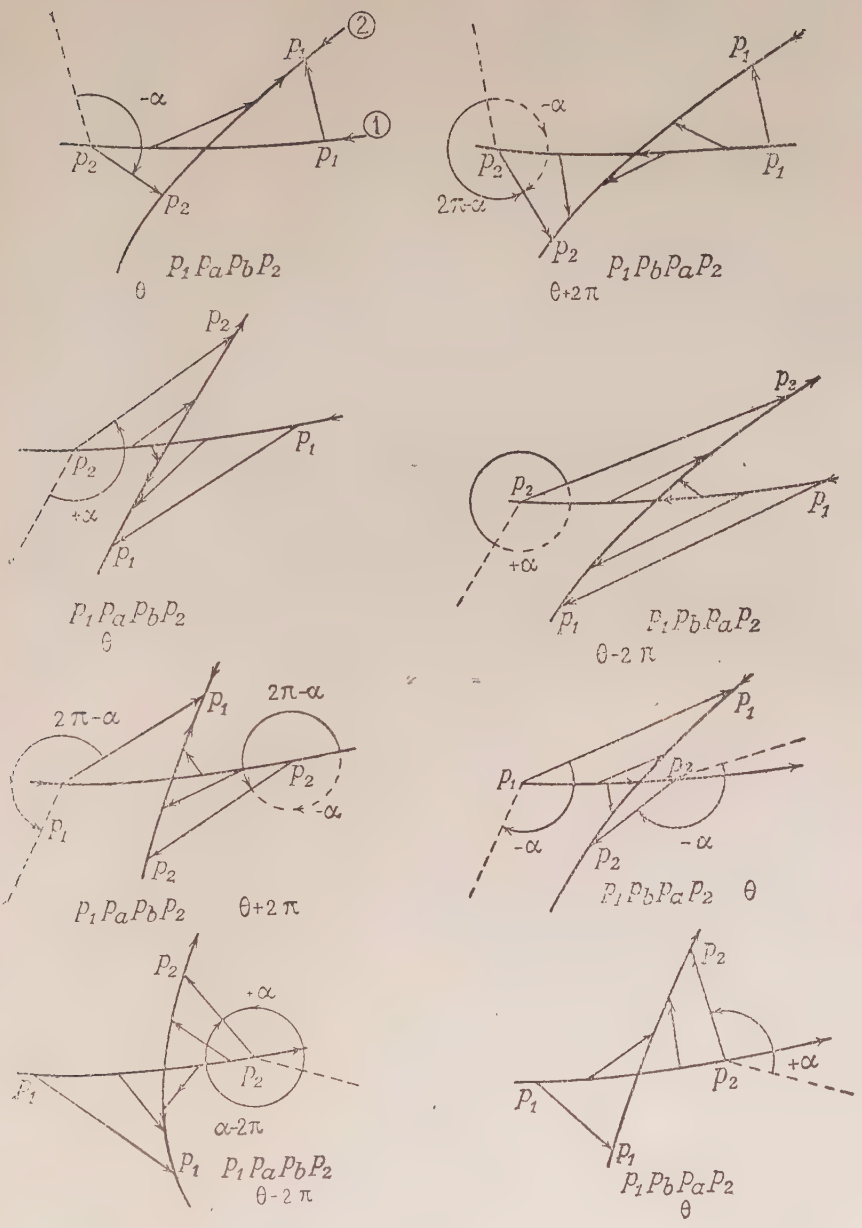

P_1
②
①
$-\alpha$
P_2
P_1
P_2
$P_1 P_a P_b P_2$
θ
P_1
$-\alpha$
P_2
P_1
$2\pi-\alpha$
P_2
$P_1 P_b P_a P_2$
$\theta+2\pi$
P_2
P_1
P_2
$+\alpha$
P_1
$P_1 P_a P_b P_2$
θ
P_2
P_2
P_1
$+\alpha$
P_1 $P_1 P_b P_a P_2$
$\theta-2\pi$
$2\pi-\alpha$
$2\pi-\alpha$
P_1
P_2
$-\alpha$
P_1
P_2
$P_1 P_a P_b P_2$ $\theta+2\pi$
P_1
P_1
P_2
$-\alpha$
$-\alpha$
P_2
$P_1 P_b P_a P_2$ θ
P_2
$+\alpha$
P_2
P_1
$\alpha-2\pi$
P_1 $P_1 P_a P_b P_2$
$\theta-2\pi$
P_2
$+\alpha$
P_2
P_1
P_1
$P_1 P_b P_a P_2$
θ

FIG. 9.

P_D \ $\frac{1}{P_L}$	+	−	Classement
+	$\theta + 2\pi$	θ	*ab*
	θ	$\theta + 2\pi$	*ba*
−	$\theta - 2\pi$	θ	*ab*
	θ	$\theta - 2\pi$	*ba*

Finalement, la condition de stabilité du circuit canonique de régulation d'une seule grandeur est contenue dans la proposition suivante :

« Le circuit de régulation canonique d'une seule grandeur, formé d'un élément semi-libre et d'un élément dépendant, qui *ne sont pas nécessairement stables en eux-mêmes*, est assuré lorsque, p décrivant le contour de Bromwhich, la variation d'argument de $\left(P_D - \frac{1}{P_L}\right)$ est égale à $-2\pi K_D$, K_D étant la somme des ordres de multiplicité des racines de $\varphi_\sigma = 0$ contenues dans le demi-plan positif. »

Il n'est plus nécessaire de connaître les zéros de φ_γ ou pôles de P_L contenus dans le demi-plan positif.

Remarque I. — Tous les régulateurs sont des appareils construits de telle façon qu'ils soient stables en eux-mêmes. Il n'en est pas de même des machines à régler (par exemple autoexcitation d'un alternateur débitant sur capacité).

En fait, les cas où K_D sera différent de zéro ne se rencontrent pas dans l'étude des appareils industriels, et la condition de stabilité du circuit de régulation est satisfaite lorsque la variation d'argument de $\left(P_D - \frac{1}{P_L}\right)$ est nulle.

Remarque II. — En remettant Δ sous la forme :

$$\Delta = \varphi_\gamma \varphi_\sigma (P_L P_D - 1)$$

On voit que l'on pourrait en déduire une condition de stabilité dans le cas où φ_γ et φ_σ ont des zéros dans le demi-plan positif.

Si K_L et K_D sont les sommes des multiplicités des racines de $\varphi_\gamma = 0$ et de $\varphi_\sigma = 0$ contenues dans le demi-plan positif, la varia-

tion d'argument de φ_γ φ_D, lorsque p décrit le contour de Bromwhich, est égale à :

$$2\pi (K_L + K_D)$$

Pour que le circuit de régulation soit stable, il faut que la variation d'argument de Δ soit nulle, c'est-à-dire que celle de $(P_L P_D - 1)$ doit être égale à $-2\pi (K_L + K_D)$.

Par conséquent, le lieu figuratif de $P = P_L P_D$ doit entourer $(K_L + K_D)$ fois le point $+1$ du point complexe dans le sens négatif lorsque p décrit le contour de Bromwhich.

Cette condition, signalée par W. Frey, nécessite la connaissance de K_D et de K_L.

On voit donc l'intérêt de la méthode précédente qui ne nécessite pas la connaissance de K_L et évite la construction de P à partir de P_L et P_D.

5. Comparaison entre le circuit de régulation et le circuit électrique. Impédance symbolique du circuit de régulation ou régulance.

Reprenons la relation qui donne la transformée de la grandeur réglée :

$$T(\gamma) = \frac{[\mathrm{I}]_L + \frac{[\mathrm{I}]_D}{\varphi_\sigma}}{P_D - \frac{1}{P_L}} \qquad (53)$$

et comparons-la à l'expression de la transformée du courant qui circule dans un circuit électrique à une seule maille comprenant : force électro-motrice, résistance, auto-inductance et capacité.

L'intensité du courant est liée à la force électro-motrice e par une équation différentielle linéaire :

$$L\frac{d^2i}{dt^2} + R\frac{di}{dt} + \frac{1}{c}i = \frac{de}{dt} \qquad (58)$$

de forme: $$f(i\,i\,i'') = \frac{de}{dt}$$

Dans le domaine de la transformation de Laplace (58), devient :

$$T(i) = \frac{T(e') + \psi_i}{Lp^2 + Rp + \frac{1}{C}} = \frac{T(e) - (e_o - \psi_i)\frac{1}{p}}{Z(p)} \qquad (59)$$

avec :

$$Z(p) = Lp + R + \frac{1}{Cp}$$

Le numérateur représente la transformée de l'évolution de la force électro-motrice, qui joue le rôle de grandeur libre, et des conditions initiales.

Le dénominateur $Z(p)$ est appelé « impédance symbolique » du circuit.

La comparaison des numérateurs de 53 et de 59 montre que ceux-ci ont le même rôle. Ils sont l'un et l'autre des causes.

La comparaison des dénominateurs montre, de son côté, que le groupement $\left(P_D - \frac{1}{P_L}\right)$ joue le même rôle que $Z(p)$ et nous pouvons le considérer comme la représentation symbolique de l'impédance de régulation du circuit.

Cette impédance symbolique est la différence de deux termes :

Le premier P_D représente le rapport de transmission de l'élément dépendant.

Le second $\frac{1}{P_L}$ est l'inverse du rapport de transmission de l'élément semi-libre dans le sens des opérations de réglage, en considérant la grandeur réglée comme grandeur de sortie et la grandeur de réglage comme grandeur d'entrée.

Du point de vue formel, $\frac{1}{P_L}$ peut être considéré comme le rapport de transmission de l'élément semi-libre inversé : la grandeur réglée jouant le rôle de grandeur d'entrée, et la grandeur de réglage celui de grandeur de sortie. Bien entendu, ce fonctionnement inversé de l'élément semi-libre est purement formel, rares étant les éléments semi-libres pour lesquels un fonctionnement inversé serait physiquement possible.

L'impédance symbolique de régulation ne se forme donc pas de la même manière que l'impédance symbolique du circuit électrique, mais les racines de l'une et de l'autre égalées à zéro définissent les caractéristiques de leurs régimes transitoires, ce qui montre le parallélisme profond des rôles de ces deux grandeurs.

Pour simplifier, nous appellerons l'impédance symbolique de régulation « Régulance » et nous la représenterons par $R(p)$.

Sa définition sera la suivante :

La régulance du circuit de régulation canonique d'une seule

grandeur est la différence des rapports de transmission des deux branches du circuit qui permettent de passer de la grandeur réglée à la grandeur de réglage.

La première branche est celle de l'élément dépendant, rapport de transmission P_D.

La seconde est celle de l'élément semi-libre (parcouru en sens inverse) rapport de transmission $\frac{1}{P_D}$.

En représentant par [I] la somme des transformées de l'effet de l'évolution de la grandeur libre et des conditions initiales dans l'élément semi-libre et dans l'élément dépendant (ramenée pour l'élément dépendant au point où l'on mesure σ ou ρ).

$$[\,I\,] = [\,I\,]_L + \frac{[\,I\,]_D}{\varphi_\sigma}. \qquad (60)$$

La transformée de la grandeur réglée (relation 53) a pour nouvelle expression :

$$T(\gamma) = \frac{[\,I\,]}{R\,(p)}. \qquad (61)$$

Telle est la relation fondamentale du circuit de régulation canonique d'une seule grandeur.

6. Cas des mécanismes asservis.

Ces mécanismes ont pour but l'asservissement d'une grandeur, sous la dépendance d'un servo-moteur, à une autre grandeur dont les variations sont imprévues.

Par exemple, la grandeur indépendante peut être un angle, et la grandeur dont on se propose de réaliser l'asservissement, l'angle que fait une pièce d'artillerie, ou un projecteur, avec une direction repère.

L'écart entre la grandeur indépendante et la grandeur que l'on veut asservir est appliqué à l'entrée du servo-moteur commandant les variations de cette dernière.

Un tel système constitue un circuit de régulation où :

— la grandeur indépendante joue le rôle de grandeur libre (l, λ) ;

— la grandeur à asservir joue le rôle de grandeur de réglage (r, ρ) ;

— l'écart entre ces deux grandeurs joue le rôle de grandeur réglée (g, γ).

Ce circuit de régulation se compose de deux éléments :

1° un élément semi-libre où se fait la comparaison entre grandeur de réglage et grandeur libre ;

2° un élément dépendant constitué par l'ensemble du servomoteur.

Le premier élément est caractérisé par une relation linéaire particulièrement simple :

$$g = r - l$$

ou, en grandeurs réduites :

$$\gamma = \rho - \lambda$$

ce qui peut encore s'écrire :

$$\rho = \gamma + \lambda$$

Son rapport de transmission est :

$$P_L = \left[\frac{T(\gamma)}{T(\rho)}\right]_o = +1 \qquad \text{il est constant.}$$

Les mécanismes asservis constituent un cas particulier du circuit de régulation canonique d'une seule grandeur de même espèce, celui où l'élément semi-libre a un rapport de transmission constant égal à + 1 avec la condition $[\,I\,]_L = T(\lambda)$.

TROISIÈME PARTIE

Etude du circuit de régulation canonique de plusieurs grandeurs

1. Le circuit de régulation canonique de deux grandeurs

Considérons un circuit de régulation se composant :

d'un élément semi-libre comportant deux grandeurs libres, deux grandeurs réglées, deux grandeurs de réglage ;

d'un élément dépendant comportant : deux grandeurs d'entrée et deux grandeurs de sortie.

La réunion des deux grandeurs réglées de l'élément semi-libre avec les deux grandeurs d'entrée de l'élément dépendant, et celle des deux grandeurs de sortie de ce dernier avec les deux grandeurs de réglage de l'élément semi-libre, constituent un circuit de régulation canonique de deux grandeurs.

Par exemple, un groupe turbo-alternateur alimentant un réseau isolé et muni d'un soutirage de vapeur alimentant un réseau de distribution de vapeur, constitue un élément semi-libre comportant :

Deux grandeurs libres :

— le paramètre de charge de la clientèle « Electrique »,
— le paramètre de charge de la clientèle « Vapeur ».

Deux grandeurs réglées :

— la vitesse de rotation ou la fréquence du réseau électrique,
— la pression de vapeur au soutirage :

Deux grandeurs de réglage :

— la soupape d'admission en tête de la turbine à vapeur,
— la soupape du soutirage.

Cas de l'élément semi-libre.

Soient λ_1 λ_2 les deux grandeurs libres,
γ_1 γ_2 les deux grandeurs réglées,
ρ_1 ρ_2 les deux grandeurs de réglage.

Ces dernières permettent de doser l'énergie qui traverse l'élément semi-libre.

Dans l'hypothèse de phénomènes linéaires sans retard, les équations de fonctionnement de cet élément peuvent être résolues par rapport aux deux grandeurs de réglage sous la forme générale :

$$\begin{aligned}\rho_1 &= f_1(\gamma_1\gamma'_1\gamma''_1 \dots \gamma_2\gamma'_2\gamma''_2 \dots \lambda_1\lambda'_1\lambda''_1 \dots \lambda_2\lambda'_2\lambda''_2 \dots)\\ \rho_2 &= f_2(\gamma_1\gamma'_1\gamma''_1 \dots \gamma_2\gamma'_2\gamma''_2 \dots \lambda_1\lambda'_1\lambda''_1 \dots \lambda_2\lambda'_2\lambda''_2 \dots)\end{aligned} \qquad (62)$$

où f_1 et f_2 sont des fonctions linéaires à coefficients constants.

Les deux relations 62 correspondent à la relation (12) dans le cas de l'élément semi-libre a une seule grandeur de réglage.

Appliquons à ces expressions la transformation de Laplace comme nous l'avons fait dans le cas du circuit de régulation d'une seule grandeur.

Nous obtenons deux expressions qui sont les correspondantes de l'expression (45) :

$$\begin{aligned}T(\rho_1) = \varphi_{1\gamma_1}(p)\,T(\gamma_1) + \varphi_{1\gamma_2}(p)\,T(\gamma_2) - \psi_{1\gamma_1}(p\,\gamma_{10}\gamma'_{10}\dots) - \psi_{1\gamma_2}(p\,\gamma_{20}\gamma'_{20}\dots) + \varphi_{1\lambda_1}(p)\,T(\lambda)\\ + \varphi_{1\lambda_2}(p)\,T(\lambda_2) - \psi_{1\lambda_1}(p\,\lambda_{10}\lambda'_{10}\dots) - \psi_{1\lambda_2}(\lambda_{20}\lambda'_{20}\dots)\end{aligned} \qquad (63)$$

$$\begin{aligned}T(\rho_2) = \varphi_{2\gamma_1}(p)\,T(\gamma_1) + \varphi_{2\gamma_2}(p)\,T(\gamma_2) - \psi_{2\gamma_1}(p\,\gamma_{10}\gamma'_{10}\dots) - \psi_{2\gamma_2}(p\,\gamma_{20}\gamma'_{20}\dots) + \varphi_{2\lambda_1}(p)\,T(\lambda_1)\\ + \varphi_{2\lambda_2}(p)\,T(\lambda_2) - \psi_{2\lambda_1}(p\,\lambda_{10}\lambda'_{10}\dots) - \psi_{2\lambda_2}(p\,\lambda_{20}\lambda'_{20}\dots)\end{aligned}$$

Introduisons les rapports de transmission entre grandeurs réglées et grandeurs de réglage comme nous l'avons fait dans le cas de l'élément semi-libre à une seule grandeur réglée.

Le rapport de transmission $P_{L_{11}} = \left(\frac{T(\gamma_1)}{T(\rho_1)}\right)_o$ entre la grandeur réglée γ_1 et la grandeur de réglage ρ_1 a pour expression :

$$P_{L_{11}} = \frac{1}{\varphi_{1\gamma_1}(p)} \qquad (64)$$

Le rapport de transmission $P_{L_{21}} = \left(\frac{T(\gamma_2)}{T(\rho_1)}\right)_o$ entre la grandeur réglée γ_2 et la grandeur de réglage ρ_1 a pour expression :

$$P_{L_{21}} = \frac{1}{\varphi_{1\gamma_2}(p)} \qquad (65)$$

Le rapport de transmission $P_{L12} = \left(\frac{T(\gamma_1)}{T(\rho_2)}\right)_o$ entre la grandeur réglée γ_1 et la grandeur de réglage ρ_2 a pour expression :

$$P_{L12} = \frac{1}{\varphi_{2\gamma_1}(p)} \tag{66}$$

Enfin le rapport de transmission $P_{L22} = \left(\frac{T(\gamma_2)}{T(\rho_2)}\right)_o$ entre la grandeur réglée γ_2 et la grandeur de réglage ρ_2 a pour expression

$$P_{L22} = \frac{1}{\varphi_{2\gamma_2}(p)}. \tag{67}$$

L'écriture des relations (63) se simplifie et devient :

$$\begin{aligned} T(\rho_1) &= \frac{1}{P_{L11}} T(\gamma_1) + \frac{1}{P_{L21}} T(\gamma_2) + [\,I\,]_L \\ T(\rho_2) &= \frac{1}{P_{L12}} T(\gamma_1) + \frac{1}{P_{L22}} T(\gamma_2) + [\,II\,]_L \end{aligned} \tag{68}$$

en représentant par $[\,I\,]_L$ et $[\,II\,]_L$ les transformées de l'effet des conditions initiales et de l'évolution des grandeurs libres dans les deux relations (63).

Ces deux dernières relations peuvent être représentées par le schéma suivant qui est le schéma type de l'élément semi-libre à deux grandeurs réglées (fig. 10) :

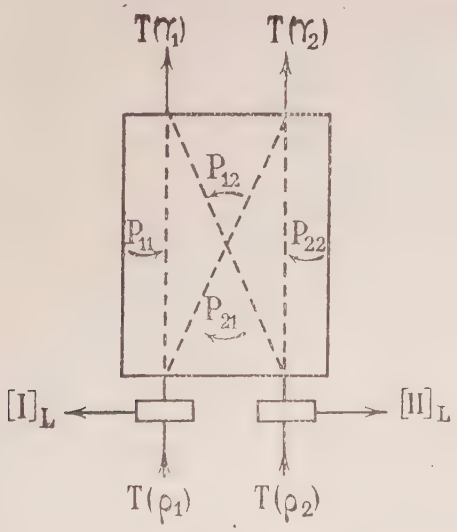


FIG. 10.

Cas de l'élément dépendant.

Sous la forme la plus générale, un élément dépendant ayant deux grandeurs d'entrée ε_1 ε_2 et deux grandeurs de sortie σ_1 σ_2 établit une double relation de forme

$$g_1(\varepsilon_1\,\varepsilon'_1\,\varepsilon''_1\,\ldots\,\varepsilon_2\,\varepsilon'_2\,\varepsilon''_2\ldots) = h_1(\sigma_1\,\sigma'_1\,\sigma''_1\ldots)$$
$$g_2(\varepsilon_1\,\varepsilon'_1\,\varepsilon''_1\,\ldots\,\varepsilon_2\,\varepsilon'_2\,\varepsilon''_2\ldots) = h_2(\sigma_2\,\sigma'_2\,\sigma''_2\ldots) \quad (69)$$

où $g_1\,g_2\,h_1\,h_2$ sont, dans l'hypothèse de phénomènes linéaires sans retard, des fonctions linéaires à coefficients constants.

L'application de la transformation de Laplace transforme ces expressions qui deviennent :

$$\varphi_{1\varepsilon_1}(p)\,\mathrm{T}(\varepsilon_1) + \varphi_{1\varepsilon_2}(p)\,\mathrm{T}(\varepsilon_2) - \psi_{1\varepsilon_1}(p\varepsilon_{10}\,\varepsilon'_{10}\ldots) - \psi_{1\varepsilon_2}(p\varepsilon_{20}\,\varepsilon'_{20}\ldots) = \varphi_{1\sigma_1}(p)\,\mathrm{T}(\sigma_1) - \psi_{1\sigma_1}(p\sigma_{10}\sigma'_{10}\ldots) \quad (70)$$

$$\varphi_{2\varepsilon_1}(p)\,\mathrm{T}(\varepsilon_1) + \varphi_{2\varepsilon_2}(p)\,\mathrm{T}(\varepsilon_2) - \psi_{2\varepsilon_1}(p\varepsilon_{10}\,\varepsilon'_{10}\ldots) - \psi_{2\varepsilon_2}(p\varepsilon_{20}\,\varepsilon'_{20}\ldots) = \varphi_{2\sigma_2}(p)\,\mathrm{T}(\sigma_2) - (\psi_{2\sigma_2}(p\sigma_{20}\sigma'_{20}\ldots)$$

Introduisons maintenant les rapports de transformation entre les transformées des grandeurs de sortie et des grandeurs d'entrée.

Le rapport de transmission $\mathrm{P}_{\mathrm{D}11} = \left(\dfrac{\mathrm{T}(\sigma_1)}{\mathrm{T}(\varepsilon_1)}\right)_o$ entre la grandeur de sortie σ_1, et la grandeur d'entrée ε_1, a pour expression :

$$\mathrm{P}_{\mathrm{D}_{11}} = \frac{\varphi_{1\varepsilon_1}(p)}{\varphi_{1\sigma_1}(p)} \quad (71)$$

Le rapport de transmission $\mathrm{P}_{\mathrm{D}_{12}} = \left(\dfrac{\mathrm{T}(\sigma_1)}{\mathrm{T}(\varepsilon_2)}\right)_o$ entre la grandeur de sortie σ_1, et la grandeur d'entrée ε_2 a pour expression :

$$\mathrm{P}_{\mathrm{D}_{12}} = \frac{\varphi_{1\varepsilon_2}(p)}{\varphi_{1\sigma_1}(p)} \quad (72)$$

Le rapport de transmission $\mathrm{P}_{\mathrm{D}_{21}} = \left(\dfrac{\mathrm{T}(\sigma_2)}{\mathrm{T}(\varepsilon_1)}\right)_o$ entre la grandeur de sortie σ_2 et la grandeur d'entrée ε_1 a pour expression :

$$\mathrm{P}_{\mathrm{D}_{21}} = \frac{\varphi_{2\varepsilon_1}(p)}{\varphi_{2\sigma_2}(p)} \quad (73)$$

Enfin, le rapport de transmission $\mathrm{P}_{\mathrm{D}_{22}} = \left(\dfrac{\mathrm{T}(\sigma_2)}{\mathrm{T}(\varepsilon_2)}\right)_o$ entre la grandeur de sortie σ_2 et la grandeur d'entrée ε_2 a pour expression :

$$\mathrm{P}_{\mathrm{D}_{22}} = \frac{\varphi_{2\varepsilon_2}(p)}{\varphi_{2\sigma_2}(p)} \quad (74)$$

L'écriture des relations 70 se simplifie et l'on a :

$$\begin{aligned} T(\sigma_1) &= P_{D11}\,T(\varepsilon_1) + P_{D12}\,T(\varepsilon_2) - \frac{[\,I\,]_D}{\varphi_{1\sigma_1}} \\ T(\sigma_2) &= P_{D21}\,T(\varepsilon_1) + P_{D22}\,T(\varepsilon_2) - \frac{[\,II\,]_D}{\varphi_{2\sigma_2}} \end{aligned} \qquad (75)$$

en représentant par $[\,I\,]_D$ et $[\,II\,]_D$ les transformées des conditions initiales des relations 70.

$$\begin{aligned} [\,I\,]_D &= \psi_{1\varepsilon_1} + \psi_{1\varepsilon_2} - \psi_{1\sigma_1} \\ [\,II\,]_D &= \psi_{2\varepsilon_1} + \psi_{2\varepsilon_2} - \psi_{2\sigma_2} \end{aligned} \qquad (76)$$

Les relations (75) peuvent être représentées par le schéma suivant qui est le schéma type de l'élément dépendant à deux grandeurs de même espèce (fig. 11).

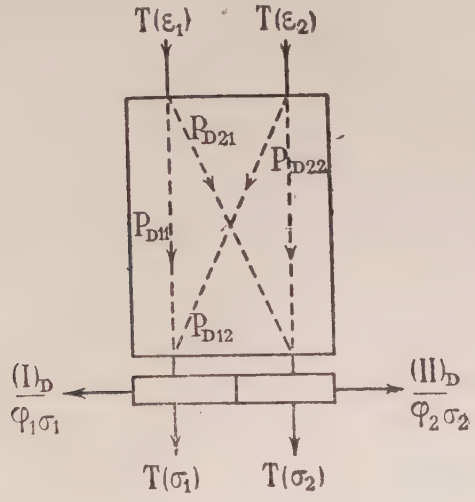


FIG. 11.

Connexion de l'élément semi-libre et de l'élément dépendant.

La connexion de l'élément semi-libre et de l'élément dépendant entraîne les quatre identités

$$\varepsilon_1 \equiv \gamma_1 \qquad \sigma_1 \equiv \rho_1$$
$$\varepsilon_2 \equiv \gamma_2 \qquad \sigma_2 \equiv \rho_2$$

Les relations (68) et (75), relations caractéristiques de ces deux types d'élément se réduisent alors au deux relations suivantes :

$$\begin{aligned} P_{D11}T(\gamma)+P_{D12}T(\gamma_2)-\frac{[I]_D}{\varphi_{1\sigma_1}} &= \frac{1}{P_{L11}}T(\gamma_1)+\frac{1}{P_{L21}}T(\gamma_2)+[I]_L \\ P_{D21}T(\gamma)+P_{D22}T(\gamma_2)-\frac{[II]_D}{\varphi_{2\sigma_2}} &= \frac{1}{P_{L12}}T(\gamma_1)+\frac{1}{P_{L22}}T(\gamma_2)+[II]_L \end{aligned} \qquad (77)$$

ou encore :

$$\begin{aligned} \left(P_{D11}-\frac{1}{P_{L11}}\right)T(\gamma_1)+\left(P_{D12}-\frac{1}{P_{L21}}\right)T(\gamma_2) &= [I]_L+\frac{[I]_D}{\varphi_{1\sigma_1}} \\ \left(P_{D21}-\frac{1}{P_{L12}}\right)T(\gamma_1)+\left(P_{D22}-\frac{1}{P_{L22}}\right)T(\gamma_2) &= [II]_L+\frac{[II]_D}{\varphi_{2\sigma_2}} \end{aligned} \qquad (78)$$

Tout le comportement du circuit de régulation à deux grandeurs réglées, vu à travers les transformées de ces grandeurs est défini par les relations (78).

Par analogie avec la terminologie utilisée dans la théorie du circuit électrique, les parenthèses $\left(P_{D11}-\frac{1}{P_{L11}}\right)$ et $\left(P_{D22}-\frac{1}{P_{L22}}\right)$ représentent les « Régulances propres » R_{11} et R_{22} des circuits de régulation 1 et 2 contenus dans le circuit d'ensemble à deux grandeurs réglées.

Les parenthèses $\left(P_{D12}-\frac{1}{P_{L21}}\right)$ et $\left(P_{D21}-\frac{1}{P_{L12}}\right)$ représentent les « Régulances de transfert » R_{12} et R_{21}.

En représentant par [I] et par [II] les transformées de l'évolution des grandeurs libres et des conditions initiales dans la première et la seconde ligne de 78 ce qui revient à poser :

$$\begin{aligned} [I] &= [I]_L+\frac{[I]_D}{\varphi_{1\sigma_1}} \\ [II] &= [II]_L+\frac{[II]_D}{\varphi_{2\sigma_2}} \end{aligned} \qquad (79)$$

Les relations fondamentales du circuit de régulation canonique à deux grandeurs réglées peuvent s'écrire :

$$\begin{aligned} R_{11}\,T(\gamma_1)+R_{12}\,T(\gamma_2) &= [I] \\ R_{21}\,T(\gamma_1)+R_{22}\,T(\gamma_2) &= [II] \end{aligned} \qquad (80)$$

Les relations (80) peuvent être résolues par rapport à $T(\gamma_1)$ et à $T(\gamma_2)$. On obtient :

$$T(\gamma_1) = \frac{R_{22}[I] - R_{12}[II]}{R_{22}R_{11} - R_{21}R_{12}}$$
$$T(\gamma_2) = \frac{R_{11}[II] - R_{21}[I]}{R_{22}R_{11} - R_{21}R_{12}} \qquad (81)$$

Telles sont les expressions des transformées des grandeurs réglées en fonction des transformées de l'évolution des grandeurs libres et des conditions initiales.

Remarquons que la transformée de l'évolution de chaque grandeur libre figure dans chacun des crochets (I) et (II) par suite du couplage interne établi dans l'élément semi-libre lui-même, couplage qu'il n'est pas possible de supprimer.

Dans un circuit de régulation, l'élément dépendant (ou régulateur) doit être déterminé de façon à rendre les opérations de réglage aussi simple que possible.

La forme des régulances de transfert

$$R_{12} = \left(P_{D12} - \frac{1}{P_{L21}}\right) \qquad R_{21} = \left(P_{D21} - \frac{1}{P_{L12}}\right)$$

suggère immédiatement de déterminer les rapports de transmission croisés P_{D12} et P_{D21} de l'élément dépendant de façon qu'ils *annulent les régulances de transfert du circuit de régulation.* Il suffit pour cela que :

$$P_{D12} = \frac{1}{P_{L21}}$$
$$P_{D21} = \frac{1}{P_{L12}} \qquad (82)$$

Les deux grandeurs réglées sont alors découplées et les relations (80) prennent la forme beaucoup plus simple :

$$R_{11}\,T(\gamma_1) = [I]$$
$$R_{22}\,T(\gamma_2) = [II] \qquad (83)$$

qui est celle des équations de deux circuits de régulation à une seule grandeur réglée qui ne sont liés l'un à l'autre que par les transformées de l'évolution des grandeurs libres et des conditions initiales.

Le couplage des grandeurs réglées, introduit par les propriétés spécifiques de l'élément semi-libre à deux grandeurs, se trouve annulé par un couplage approprié introduit dans l'élément dépen-

dant. C'est le but vers lequel devra tendre la réalisation de cet élément.

Les conditions de stabilité du circuit de régulation à deux grandeurs réglées se ramènent alors dans ce cas, aux conditions de stabilité de deux circuits distincts à une seule grandeur, de régulance R_{11} et R_{12}, problème traité dans la seconde partie.

2. Le circuit de régulation canonique de *n* grandeurs réglées.

Nous considérons toujours le circuit de régulation canonique comprenant un élément semi-libre et un élément dépendant mettant en jeu n grandeurs réglées, n grandeurs libres et n grandeurs de réglage.

L'élément semi-libre est caractérisé par les rapports de transmission

$$\begin{matrix} P_{L11} & P_{L12} & \dots\dots & P_{L1n} \\ \dots & \dots & & \dots \\ P_{Ln1} & P_{Ln2} & \dots\dots & P_{Lnn} \end{matrix}$$

L'élément dépendant est caractérisé par les rapports de transmission

$$\begin{matrix} P_{D11} & P_{D12} & \dots\dots & P_{D1n} \\ \dots & \dots & & \dots \\ P_{Dn1} & P_{Dn2} & & P_{Dnn} \end{matrix}$$

à partir desquels on peut former les régulances propres et les régulances de transfert de régulation.

$$\begin{matrix} R_{11} = P_{D11} - \dfrac{1}{P_{L11}} & R_{12} = P_{D12} - \dfrac{1}{P_{L21}} & \dots\dots & R_{1n} = P_{D1n} - \dfrac{1}{P_{Ln1}} \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & & \dots\dots\dots \\ R_{n1} = P_{Dn1} - \dfrac{1}{P_{L1n}} & R_{n2} = P_{Dn2} - \dfrac{1}{P_{L2n}} & \dots\dots & R_{nn} = P_{Dnn} - \dfrac{1}{P_{Lnn}} \end{matrix}$$

A partir des conditions initiales et de l'évolution des grandeurs libres, on peut former les crochets [I] [II] ... [N] qui représentent les transformées de l'évolution des grandeurs libres et des conditions initiales.

Par une généralisation immédiate des relations (80) on peut écrire les équations du circuit de régulation canonique de n grandeurs réglées sous la forme :

$$\begin{aligned}
&R_{11}\,T(\gamma_1) + R_{12}\,T(\gamma_2) + \ldots \quad \ldots + R_{1n}\,T(\gamma_n) = [\,I\,] \\
&R_{21}\,T(\gamma_1) + R_{22}\,T(\gamma_2) + \ldots \quad \ldots + R_{2n}\,T(\gamma_n) = [\,II\,] \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&R_{n1}\,T(\gamma_1) + R_{n2}\,T(\gamma_2) + \ldots \quad \ldots + R_{nn}\,T(\gamma_n) = [\,N\,]
\end{aligned} \tag{84}$$

L'adaptation de l'élément dépendant aux caractéristiques de l'élément semi-libre permet d'annuler les régulances de transfert R_{ij} et de ramener le système 84 aux équations de n circuits de régulation d'une seule grandeur liés les uns aux autres par les seules conditions initiales et par l'évolution des grandeurs libres.

Le système 84 prend alors la forme :

$$\begin{aligned}
&R_{11}\,T(\gamma_1) = [\,I\,] \\
&R_{22}\,T(\gamma_2) = [\,II\,] \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&R_{nn}\,T(\gamma_n) = [\,N\,]
\end{aligned} \tag{85}$$

L'étude des conditions de stabilité du système (85) est incomparablement plus simple que celle du système (84) elle se réduit à l'étude de la stabilité de n circuits de régulation d'une seule grandeur dont les régulances sont: $R_{11}\,R_{22} \ldots R_{nn}$ problème traité dans la seconde partie.

3. **Décomposition de l'élément semi-libre en plusieurs éléments de même nature physique groupés en parallèle**

Il arrive très fréquemment que l'élément semi-libre d'un circuit de régulation se décompose en plusieurs éléments de même nature physique groupés en parallèle, chacun d'eux constituant une fraction de l'élément semi-libre équivalent à leur ensemble. C'est ce qui arrive, par exemple lorsque plusieurs groupes turbo-alternateurs, débitant en parallèle, alimentent un réseau de distribution d'énergie électrique.

Nous nous trouvons alors devant un nombre surabondant de grandeurs libres et de grandeurs de réglage. Deux méthodes peuvent être envisagées pour résoudre un tel problème :

a) Ramener le nombre des grandeurs de réglage au nombre des grandeurs réglées en liant les différentes grandeurs de réglage les unes aux autres par des relations arbitraires qui ne laissent subsister qu'un nombre de grandeurs de réglage indépendantes égal à celui des grandeurs à régler.

Les différentes grandeurs libres constituent autant de familles de grandeurs libres de même nature qu'il y a de grandeurs à régler, car les différents éléments semi-libres sont, par hypothèse, de même nature physique. Les grandeurs libres d'une même famille peuvent être alors considérées comme les composantes d'une grandeur libre unique équivalente à la famille à laquelle elles appartiennent. Le nombre des grandeurs libres est alors égal à celui des grandeurs à régler et à celui des grandeurs de réglage.

b) Multiplier artificiellement le nombre des grandeurs réglées pour rendre ce nombre égal à celui des grandeurs de réglage. Nous verrons que par un choix convenable des nouvelles grandeurs réglées et des nouvelles grandeurs de réglage, il est possible non seulement de rendre canonique les équations du circuit de régulation, mais encore de découpler les nouvelles grandeurs réglées de telle façon que partant d'un système comportant initialement m grandeurs à régler issues d'un élément semi-libre se décomposant en n éléments distincts de même nature physique, on soit conduit à un système se composant de n éléments semi-libres ayant chacun m grandeurs à régler, soit $m.\ n$ grandeurs réglées pour l'ensemble du système puis, par l'adaptation des n éléments dépendants, à un système de $m.\ n$ circuits de régulation d'une seule grandeur réglée qui ne sont liés les uns aux autres que par l'évolution des grandeurs libres et les conditions initiales.

a) Première méthode. — *Réduction du nombre des grandeurs de règle à celui des grandeurs réglées*

Considérons un circuit de régulation dont l'élément semi-libre se décompose en n éléments semi-libres de même nature physique, montés en parallèle, ayant chacun trois grandeurs de réglage et possédant en commun trois grandeurs de sortie qui seront les trois grandeurs réglées.

Ce serait le cas, par exemple, de n groupes turbo-alternateurs dynamos munis d'un soutirage de vapeur qui alimenteraient en parallèle : un réseau alternatif, un réseau continu et un réseau de distribution de vapeur.

Un tel circuit comprend :

3 grandeurs réglées	$\gamma'\ \gamma''\ \gamma'''$
3 n grandeurs libres	$\lambda'_1\lambda''_1\lambda'''_1;\ \lambda'_2\lambda''_2\lambda'''_2;\ \ldots\ldots\ \lambda'_n\lambda''_n\lambda'''_n$

3 n grandeurs de réglage $\rho'_1\rho''_1\rho'''_1$; $\rho'_2\rho''_2\rho'''_2$; ..... $\rho'_n\rho''_n\rho'''_n$ et peut être représenté par la figure 12 :

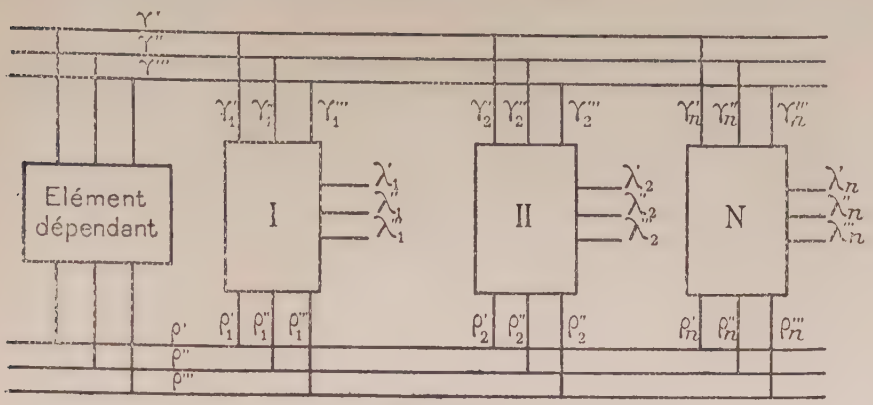


FIG. 12.

Les grandeurs libres forment trois familles :

$$\lambda'_1\lambda'_2 \ldots\ldots \lambda'_n\,; \quad \lambda''_1\lambda''_2 \ldots\ldots \lambda''_n\,; \quad \lambda'''_1\lambda'''_2 \ldots\ldots \lambda'''_n$$

et sont équivalentes à 3 grandeurs libres $\lambda'\,\lambda''\,\lambda'''$ décomposées chacune en n grandeurs distinctes.

Les grandeurs de réglage forment aussi trois familles :

$$\rho'_1\rho'_2 \ldots\ldots \rho'_n\,; \quad \rho''_1\rho''_2 \ldots\ldots \rho''_n\,; \quad \rho'''_1\rho'''_2 \ldots\ldots \rho'''_n\,;$$

Introduisons entre les 3 n grandeurs de réglage 3 $(n-1)$ relations arbitraires de forme :

$$\begin{array}{lll}
\rho'_2 = a'_2\,\rho'_1 & \rho''_2 = a''_2\,\rho''_1 & \rho'''_2 = a'''_2\,\rho'''_1 \\
\rho'_3 = a'_3\,\rho'_1 & \rho''_3 = a''_3\,\rho''_1 & \rho'''_3 = a'''_3\,\rho'''_1 \\
\ldots \quad \ldots\ldots & \ldots \quad \ldots\ldots & \ldots \quad \ldots\ldots \\
\rho'_n = a'_n\,\rho'_1 & \rho''_n = a''_n\,\rho''_1 & \rho'''_n = a'''_n\,\rho'''_1
\end{array}$$

Les 3 $(n-1)$ coefficients arbitraires permettront de satisfaire à 3 $(n-1)$ conditions supplémentaires telles que la répartition économique des puissances produites et des débits de vapeur, ou toutes autres conditions suivant la nature physique des éléments semi-libres considérés.

Il ne nous reste alors que 3 grandeurs de réglage indépendantes $\rho'_1\,\rho''_1\,\rho'''_1$ pour trois grandeurs à régler et trois grandeurs libres.

Nous sommes en présence d'un circuit de régulation canonique de trois grandeurs réglées dont les équations générales sont :

$$\begin{array}{l} R_{11}\,T(\gamma_1) + R_{12}\,T(\gamma_2) + R_{13}\,T(\gamma_3) = [\,I\,] \\ R_{21}\,T(\gamma_1) + R_{22}\,T(\gamma_2) + R_{23}\,T(\gamma_3) = [\,II\,] \\ T_{31}\,R(\gamma_1) + R_{32}\,T(\gamma_2) + R_{33}\,T(\gamma_3) = [\,III\,] \end{array} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \gamma' \equiv \gamma_1 \\ \gamma'' \equiv \gamma_2 \\ \gamma''' \equiv \gamma_3 \end{cases} \quad (86)$$

Par un choix convenable des rapports de transmission croisés de l'élément dépendant, il est possible d'annuler les régulances de transfert R_{ij} et de ramener les équations de ce circuit de régulation à celles de 3 circuits de régulation d'une seule grandeur liés les uns aux autres par l'évolution des grandeurs libres et des conditions initiales.

Le système 86 se simplifie et s'écrit :

$$\begin{array}{l} R_{11}\,T(\gamma_1) = [\,I\,] \\ R_{22}\,T(\gamma_2) = [\,II\,] \\ R_{33}\,T(\gamma_3) = [\,III\,] \end{array} \quad (87)$$

b) Seconde méthode. — *Multiplication artificielle du nombre des grandeurs réglées pour rendre ce nombre égal à celui des grandeurs de réglage.*

Reprenons l'exemple du circuit de régulation précédent où l'élément semi-libre se décompose en n éléments semi-libres distincts de même nature physique, ayant chacun trois grandeurs libres, trois grandeurs de réglage et trois grandeurs de sortie, ces dernières réunies en trois groupes constituent les trois grandeurs réglées du circuit de régulation.

Soient

$\gamma'\ \gamma''\ \gamma'''$ les 3 grandeurs réglées du circuit de régulation

$\begin{matrix} \rho'_1 & \rho''_1 & \rho'''_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \rho'_n & \rho''_n & \rho'''_n \end{matrix}$ les 3 n grandeurs de réglage

$\begin{matrix} \lambda'_1 & \lambda''_1 & \lambda'''_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \lambda'_n & \lambda''_n & \lambda'''_n \end{matrix}$ les 3 n grandeurs libres

Recherchons parmi les grandeurs physiques dont les valeurs sont modifiées par les grandeurs de réglage, 3 groupes de n grandeurs chacun que nous représenterons par

$$\begin{matrix} \mu'_1 & \mu''_1 & \mu'''_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \mu'_n & \mu''_n & \mu'''_n \end{matrix}$$

choisis de telle façon que ces 3 n grandeurs satisfassent aux trois conditions suivantes :

$$\sum_1^n \mu'_i = 0 \quad \sum_1^n \mu''_i = 0 \quad \sum_1^n \mu'''_i = 0 \qquad (88)$$

Par exemple, dans le cas concret d'un ensemble de n groupes turbo-alternateurs dynamos avec soutirage de vapeur alimentant un réseau de distribution à courant alternatif, un second réseau de distribution à courant continu, et un troisième réseau de distribution de vapeur, les grandeurs μ'_i, μ''_i, μ'''_i seraient les puissances échangées entre les tranches des barres de distribution des réseaux alternatif et continu et les débits de vapeur entre tranches du collecteur de distribution du réseau vapeur suivant schéma de la figure 13

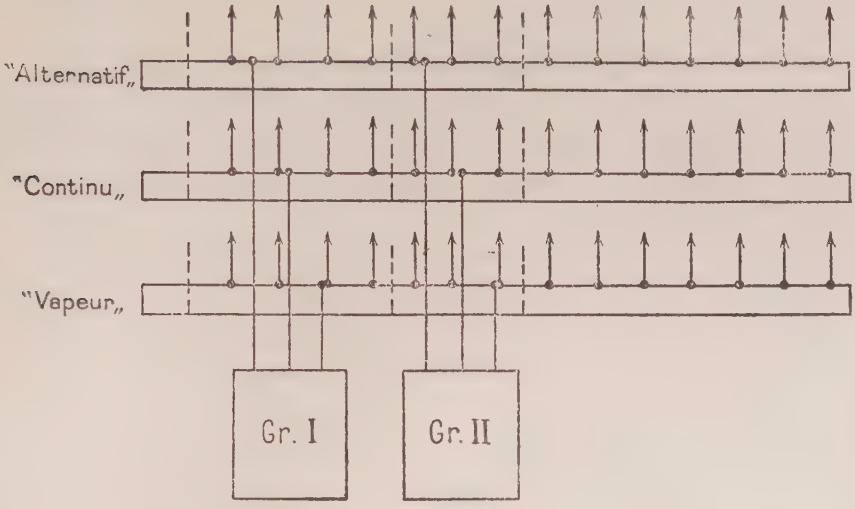


FIG. 13.

il est facile de voir que les sommes algébriques des puissances et des débits échangés entre tranches sont nulles.

Combinons maintenant ces 3 groupes de n grandeurs aux trois grandeurs réglées de façon à constituer 3 n combinaisons linéaires que nous choisirons comme nouvelles grandeurs réglées.

$$\begin{array}{lll} \Gamma'_1 = \mu'_1 + K'_1\gamma' & \Gamma''_1 = \mu''_1 + K''_1\gamma'' & \Gamma'''_1 = \mu'''_1 + K'''_1\gamma''' \\ \Gamma'_2 = \mu'_2 + K'_2\gamma' & \Gamma''_2 = \mu''_2 + K''_2\gamma'' & \Gamma'''_2 = \mu'''_2 + K'''_2\gamma''' \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \Gamma'_n = \mu'_n + K'_n\gamma' & \Gamma''_n = \mu''_n + K''_n\gamma'' & \Gamma'''_n = \mu'''_n + K'''_n\gamma''' \end{array} \qquad (89)$$

en ayant soin de combiner entre elles les grandeurs qui appartiennent au même système de grandeurs physiques : par exemple : des grandeurs du système « alternatif », des grandeurs du système « continu », des grandeurs du système « vapeur ».

Si les trois grandeurs réglées sont, dans l'exemple concret des n groupes turbo-alternateurs dynamos : la fréquence du réseau alternatif, la tension du réseau continu, la pression du réseau vapeur :

les puissances d'échange entre tranches « alternatif » seront combinées à la fréquence ;

les puissances d'échange entre tranches « continu » seront combinées à la tension ;

les débits d'échange entre tranches « vapeur » seront combinées à la pression ;

pour former les 3 n nouvelles grandeurs réglées.

Le réglage de ces 3 n grandeurs entraîne le réglage des grandeurs réglées initiales $\gamma'\ \gamma''\ \gamma'''$.

En effet, lorsque les écarts de réglage des grandeurs Γ_i sont simultanément nuls, il résulte du fait des conditions (88) que les écarts de $\gamma'\ \gamma''\ \gamma'''$ sont nuls également.

Le changement de grandeurs réglées ($\Gamma'_1\Gamma'_2 \ldots \Gamma'_n$; $\Gamma''_1\Gamma''_2 \ldots \Gamma''_n \ldots$ au lieu de $\gamma'\ \gamma''\ \gamma'''$) nécessite l'incorporation, aux éléments semi-libres, d'appareils permettant de faire apparaître les nouvelles grandeurs réglées en effectuant les combinaisons linéaires (88) qui définissent ces nouvelles grandeurs.

Cherchons maintenant quelle modification il faudrait apporter aux grandeurs de réglage pour que nous puissions considérer les nouvelles grandeurs réglées comme des grandeurs indépendantes entre éléments d'indice différent.

Pour cela, décomposons chaque groupe de grandeurs de réglage propre à un élément semi-libre déterminé ($\rho'_1\ \rho''_1\ \rho'''_1$) pour l'élément I, $\rho'_2\ \rho''_2\ \rho'''_2$ pour l'élément 2.....) en deux groupes distincts :

— un premier constitué par les grandeurs $\rho'_{01}\ \rho''_{01}\ \rho'''_{01}$ pour l'élément 1, $\rho'_{02}\ \rho''_{02}\ \rho'''_{02}$ pour l'élément 2..., etc... dont les variations assurent l'invariance des nouvelles grandeurs réglées propres à l'élément considéré en cas de variation des grandeurs libres *extérieures* à cet élément, ce qui suppose l'incorporation à chaque élément semi-libre d'un élément dépendant particulier assurant l'in-

variance des grandeurs réglées de cet élément en cas de variation des grandeurs libres extérieures à cet élément ;

— un second, constitué par les grandeurs $\bar{\rho}'_1\ \bar{\rho}''_1\ \bar{\rho}'''_1$ pour l'élément 1, $\bar{\rho}'_2\ \bar{\rho}''_2\ \bar{\rho}'''_2$ pour l'élément 2..., etc., que nous considérerons comme le groupe des véritables grandeurs de réglage propre à l'élément semi-libre considéré. Ce groupe assurera l'invariance des grandeurs réglées en cas de variation des seules grandeurs libres de cet élément.

Associons maintenant à chaque élément semi-libre de nouvelle conception, un élément dépendant assurant la liaison entre les nouvelles grandeurs réglées Γ et les nouvelles grandeurs de réglage $\bar{\rho}$; nous aurons constitué un circuit de régulation comportant au total $3\ n$ grandeurs libres (λ) $3\ n$ grandeurs réglées (Γ) $3\ n$ grandeurs de réglage ($\bar{\rho}$).

En fait, les deux éléments dépendants que nous avons distingués à côté de chaque élément semi-libre initial sont confondus en un seul qui assure la liaison entre les nouvelles grandeurs réglées Γ et les grandeurs physiques de réglage somme des grandeurs ρ_o et $\bar{\rho}$.

La distinction que nous venons d'établir entre les grandeurs ρ_o et $\bar{\rho}$ nous permet de considérer les grandeurs réglées Γ comme indépendantes entre éléments semi-libres à condition de considérer les $\bar{\rho}$ comme grandeurs de réglage.

Les équations générales du circuit de régulation canonique à $3\ n$ grandeurs qui a pour grandeurs réglées

$$\Gamma'_1, \Gamma''_1, \Gamma'''_1, \Gamma'_2\ \Gamma''_2\ \Gamma'''_2 \quad \ldots\ldots\ldots \quad \Gamma'_n\ \Gamma''_n\ \Gamma'''_n$$

et pour grandeurs de réglage

$$\bar{\rho}'_1\ \bar{\rho}''_1\ \bar{\rho}'''_1, \quad \bar{\rho}'_2\ \bar{\rho}''_2\ \bar{\rho}'''_2, \ \ldots\ldots\ \bar{\rho}'_n\ \bar{\rho}''_n\ \bar{\rho}'''_n$$

s'écrivent alors immédiatement. On a :

$$R_{1'1'}\,T(\Gamma'_1) + R_{1'1''}\,T(\Gamma''_1) + R_{1'1'''}\,T(\Gamma'''_1) + R_{1'2'}\,T(\Gamma'_2) + R_{1'2''}\,T(\Gamma''_2) + \\ + R_{1'2'''}\,T(\Gamma'''_2) + \ldots + R_{1'n}\,T(\Gamma'''_n) = [\,I'\,]$$

$$R_{1''1'}\,T(\Gamma'_1) + R_{1''1''}\,T(\Gamma''_1) + R_{1''1'''}\,T(\Gamma'''_1) + R_{1''2'}\,T(\Gamma'_2) + R_{1''2''}\,T(\Gamma''_2) + \\ + R_{1''2'''}\,T(\Gamma'''_2) + \ldots + R_{1''n'''}\,T(\Gamma'''_n) = [\,I''\,]$$

$$R_{1'''1'}\,T(\Gamma'_1) + R_{1'''1''}\,T(\Gamma''_1) + R_{1'''1'''}\,T(\Gamma'''_1) + R_{1'''2'}\,T(\Gamma'_2) + R_{1'''2''}\,T(\Gamma''_2) + \\ + R_{1'''2'''}\,T(\Gamma'''_2) + \ldots + R_{1'''n'''}\,T(\Gamma'''_n) = [\,I'''\,]$$

$$R_{2'1'}\,T(\Gamma'_1) + R_{2'1''}\,T(\Gamma''_1) + R_{2'1'''}\,T(\Gamma'''_1) + R_{2'2'}\,T(\Gamma'_2) + R_{2'2''}\,T(\Gamma''_2) + \\ + R_{2'2'''}\,T(\Gamma'''_2) + \ldots + R_{2'n'''}\,T(\Gamma'''_n) = [\,II'\,]$$

et ainsi de suite jusqu'à :

$$R_{n'''1'}\,T(\Gamma'_1) + R_{n'''1''}\,T(\Gamma''_1) + R_{n''1'''}\,T(\Gamma'''_1) + R_{n'''2'}\,T(\Gamma'_2) + R_{n'''2''}\,T(\Gamma''_2) + \\ + R_{n'''2'''}\,T(\Gamma'''_2) + \ldots + R_{n'''n'''}\,T(\Gamma'''_n) = [\,N'''\,] \qquad (90)$$

Les régulances qui interviennent dans les relations (90) sont de trois sortes différentes :

a) Les régulances propres de circuit comprenant un élément dépendant et un élément semi-libre de même indice, caractérisées par des indices et des accents identiques :

$$R_{1'1'},\ R_{1''1''},\ R_{1'''1'''},\ R_{2'2'},\ R_{2''2''},\ R_{2'''2'''} \ldots\ldots\ldots$$

b) Les régulances de transfert d'un circuit comprenant un élément dépendant et un élément semi-libre de même indice, caractérisées par des indices identiques mais des accents différents :

$$R_{1'1''},\ R_{1''1'''},\ R_{1'''1'},\ \ldots\ldots\ R_{2'2''}\ R_{2''2'''},\ R_{2'''2'}\ \ldots\ldots$$

c) Les régulances de transfert d'un circuit comprenant un élément semi-libre et un élément dépendant, d'indices différents, caractérisées par des indices différents :

$$R_{1'2'}\quad R_{1'2''}\quad R_{1'2'''}\quad R_{2'1'}\quad R_{2'1''}\quad R_{2'1'''}\ \ldots\ldots$$

Examinons le cas de ces dernières : il résulte de l'*indépendance entre groupes de grandeurs réglées appartenant à des éléments semi-libres différents*, grandeurs dont les indices sont eux-mêmes différents, que toutes les régulances de transfert entre éléments d'indice différent sont identiquement nulles.

Le système (90) se simplifie et prend la forme suivante :

$$\begin{aligned}
&R_{1'1'}\ T(\Gamma'_1) + R_{1'1''}\ T(\Gamma''_1) + R_{1'1'''}\ T(\Gamma'''_1) = [\,I'\,] \\
&R_{1''1'}\ T(\Gamma'_1) + R_{1''1''}\ T(\Gamma''_1) + R_{1''1'''}\ T(\Gamma'''_1) = [\,I''\,] \\
&R_{1'''1'}\ T(\Gamma'_1) + R_{1'''1''}\ T(\Gamma''_1) + R_{1'''1'''}\ T(\Gamma'''_1) = [\,I'''\,] \\
&R_{2'2'}\ T(\Gamma'_2) + R_{2'2''}\ T(\Gamma''_2) + R_{2'1'''}\ T(\Gamma'''_2) = [\,II'\,] \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&R_{n'n'}\ T(\Gamma'_n) + R_{n'n''}\ T(\Gamma''_n) + R_{n'n'''}\ T(\Gamma'''_n) = [\,N'\,] \\
&R_{n''n'}\ T(\Gamma'_n) + R_{n''n''}\ T(\Gamma''_n) + R_{n''n'''}\ T(\Gamma'''_n) = [\,N''\,] \\
&R_{n'''n'}\ T(\Gamma'_n) + R_{n'''n''}\ T(\Gamma''_n) + R_{n'''n'''}\ T(\Gamma'''_n) = [\,N'''\,]
\end{aligned} \qquad (91)$$

qui représente le comportement de n circuits de régulation à 3 grandeurs réglées, liés les uns aux autres par l'évolution des grandeurs libres et des conditions initiales.

L'adaptation des n éléments dépendants aux n éléments semi-libres permettrait de découpler les grandeurs réglées d'un même élément en annulant ses régulances de transfert. Le système 91 se simplifierait encore et prendrait la forme :

$$
\begin{aligned}
&R_{1'1'}\ T(\Gamma'_1) = [I'] \\
&R_{1''1''}\ T(\Gamma''_1) = [I''] \\
&R_{1'''1'''}\ T(\Gamma'''_1) = [I'''] \\
&R_{2'2'}\ T(\Gamma'_2) = [II'] \\
&R_{2''2''}\ T(\Gamma''_1) = [II''] \\
&R_{2'''2'''}\ T(\Gamma'''_2) = [II'''] \\
&\cdots\cdots\cdots \\
&\cdots\cdots\cdots \\
&R_{n'n'}\ T(\Gamma'_n) = [N'] \\
&R_{n''n''}\ T(\Gamma''_n) = [N''] \\
&R_{n'''n'''}\ T(\Gamma'''_n) = [N''']
\end{aligned}
\qquad (92)
$$

qui représente le comportement de 3 n circuits de régulation d'une seule grandeur réglée, liés les uns aux autres par l'évolution des grandeurs libres et les conditions initiales.

Ainsi, le problème de la régulation de plusieurs grandeurs à partir de n éléments semi-libres de même nature physique groupés en parallèle, est susceptible d'être résolu par deux méthodes bien différentes : soit par diminution du nombre surabondant des grandeurs de réglage, de façon à ne conserver qu'un nombre de grandeurs de réglage indépendantes égal à celui des grandeurs réglées, soit par multiplication du nombre de ces dernières de façon à le rendre égal à celui des grandeurs de réglage.

— La première méthode ne présente aucune difficulté de principe, mais exige une étroite dépendance entre les grandeurs de réglage des différents éléments, ce qui conduit, si ceux-ci ne se trouvent pas dans un même lieu géographique, à utiliser des liaisons afin de réaliser les relations de dépendance nécessaires.

— La seconde méthode nous paraît plus ingénieuse, car elle évite toute liaison supplémentaire entre éléments semi-libres différents.

Son succès tient d'une part au choix des nouvelles grandeurs réglées dont l'annulation des écarts entraîne *ipso facto* l'annulation des écarts des grandeurs à régler, d'autre part à l'indépendance des nouvelles grandeurs réglées entre éléments d'indices différents grâce à la décomposition de chaque groupe de grandeur de réglage en deux groupes distincts assurant, le premier l'invariance des nouvelles grandeurs réglées en cas de variation des grandeurs libres extérieures à l'élément auquel appartient le groupe considéré, le second l'invariance des mêmes grandeurs réglées en cas de variation des grandeurs libres propres à cet élément.

Cette dernière méthode est appliquée au réglage de la fréquence dans les réseaux électriques interconnectés. L'unique grandeur à régler est la fréquence dont on désire annuler les écarts par rapport à une valeur repère. Les grandeurs auxiliaires utilisées sont les puissances échangées entre chaque réseau et l'ensemble de l'interconnexion.

Si f représente la fréquence à régler, p_1 p_2... p_n les puissances d'échange des réseaux 1 2... n la grandeur réglée propre au réseau d'indice i a pour expression :

$$\Gamma_i = p_i + k_i f \qquad (93)$$

chaque réseau, schématisé sous la forme d'un élément semi-libre a une seule grandeur réglée, tend à annuler les écarts de sa grandeur réglée Γ_i définie par (93).

Sa loi de réglage est donc :

$$\Delta\Gamma_i = \Delta p_i + k_i \Delta_f \qquad (94)$$

Du fait que la somme algébrique des puissances d'échange $\Sigma\, p_i$ est identiquement nulle, chaque puissance échangée sur une ligne déterminée étant comptée deux fois avec des signes opposés, le maintien de toutes les grandeurs Γ_i à la valeur repère entraîne le maintien de la fréquence f à la sienne.

Le réglage des réseaux électriques par la méthode des écarts combinés de la puissance d'échange et de la fréquence, a été proposé en 1936 par G. Darrieus et J. Fallou, sous deux formes légèrement différentes, et appliqué avec succès au réglage du réseau de la Région parisienne.

Ce mode de réglage, justifié par ses auteurs à l'aide de raisonnements physiques valables dans le seul cas des réseaux électriques, ne constitue qu'un cas particulier de la méthode de réglage par multiplication des grandeurs à régler que nous venons d'exposer dans son cadre général.

QUATRIÈME PARTIE

Les équations générales du circuit de régulation

L'étude du circuit de régulation développée dans les trois parties précédentes, nous a permis de dégager les propriétés du circuit de régulation canonique, formé par l'assemblage d'un élément semi-libre et d'un élément dépendant comportant une ou plusieurs grandeurs de même espèce.

Transposée dans le domaine du circuit électrique, l'étude qui précède correspond à l'étude du circuit électrique composé d'un générateur et d'un récepteur directement reliés l'un à l'autre.

Or, les lois du circuit électrique ont pu être dégagées dans le cas de circuits infiniment plus complexes d'une structure tout à fait générale : ce sont les lois de Kirchhoff.

Nous nous proposons d'établir la même généralisation dans le domaine du circuit de régulation et de déterminer les lois générales qui régissent le comportement du circuit de régulation de structure tout à fait générale.

Nous qualifierons ce circuit de « Circuit de Régulation Complexe » pour souligner que nous nous écartons de la simplicité de structure du circuit canonique.

Nous commencerons par examiner le cas du circuit de régulation complexe formé d'éléments à une seule grandeur de même espèce, puis nous étendrons les résultats obtenus au cas du circuit de régulation complexe formé d'éléments semi-libres et dépendants à plusieurs grandeurs de même espèce, ce qui nous conduira à une forme tout à fait générale des équations du circuit de régulation.

Remarque : Les éléments constitutifs du circuit de régulation : éléments semi-libres et éléments dépendants, sont caractérisés par un sens de fonctionnement bien défini : les assemblages que l'on peut constituer en réunissant un certain nombre de ces éléments

doivent donc respecter le sens de fonctionnement de chacun d'eux, ce qui conduit obligatoirement à réunir une sortie à une entrée. Nous supposerons dans ce qui suit, qu'il en est bien toujours ainsi.

1. Le circuit de régulation complexe formé par la réunion d'éléments semi-libres et d'éléments dépendants comportant une seule grandeur de même espèce.

Imaginons un ensemble d'éléments semi-libres et d'éléments dépendants à une seule grandeur de même espèce, réunis les uns aux autres de façon à constituer un circuit de régulation complexe (fig.14).

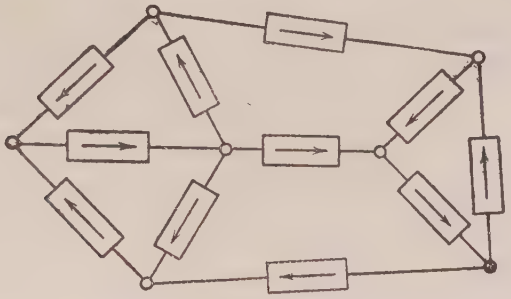


FIG. 14. — Circuit de régulation complexe formé par l'assemblage d'élément. semi-libres et d'éléments dépendants à une seule grandeur.

Ce circuit se trouve constitué par l'assemblage en des points de branchement d'un certain nombre de branches.

Chaque branche contient un ou plusieurs éléments placés bout à bout, la sortie de l'un étant réunie à l'entrée du suivant.

Nous pourrons admettre, sans modifier la généralité des résultats, que chaque branche est composée d'un seul élément, semi-libre ou dépendant.

En effet, si une branche était composée de plusieurs éléments de même nature ou de nature différente réunis bout à bout, l'ensemble des éléments pourrait être remplacé par un élément unique, de même nature, ou par un seul élément semi-libre dont les propriétés seraient identiques à celles de l'ensemble.

Le circuit de régulation le plus simple est formé par l'assemblage de deux branches, et, en conservant la terminologie habituelle du circuit électrique, cet assemblage le plus simple qui soit forme une *maille* (fig. 15).

L'adjonction d'une troisième branche entraîne l'apparition de *deux points de branchement* qui correspondent aux deux sommets du circuit électrique correspondant (fig. 16).

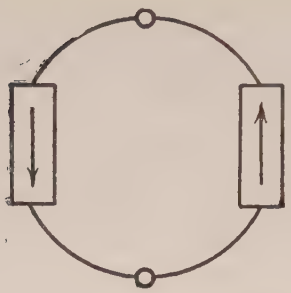


FIG. 15. — Circuit de régulation à deux branches, une seule maille.

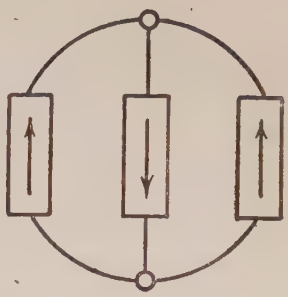


FIG. 16. — Circuit de régulation à 3 branches. Deux points de branchement. Deux mailles indépendantes.

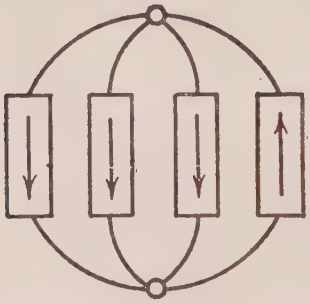


FIG. 17. — Circuit de régulation à 4 branches. Deux points de branchement. Trois mailles indépendantes.

L'adjonction d'une troisième branche complique le circuit de régulation de même qu'il complique le circuit électrique initial. On y distingue alors trois mailles dont deux seulement sont indépendantes car les phénomènes qui se passent dans l'une dépendent des phénomènes qui se passent dans les deux autres.

Pour trois branches et deux points de branchement, nous n'avons donc que *deux mailles indépendantes* à l'image de ce qui se passe dans le circuit électrique.

Si nous ajoutons une quatrième branche (fig. 17), il n'existe que deux points de branchement ; nous distinguons alors trois mailles indépendantes, chaque maille indépendante devant contenir au moins une branche qui n'ait pas été utilisée pour constituer l'une

des mailles précédentes. La généralisation se fait donc exactement à l'image du circuit électrique.

Si b est le nombre de branches, p le nombre de points de branchement, le nombre des mailles indépendantes contenues dans le circuit de régulation est donné par la relation :

$$n, \text{ nombre de mailles indépendantes } = b - p + 1 \quad (95)$$

En dehors du sens de circulation imposé par la structure même des éléments, rien ne distingue jusqu'ici le circuit de régulation du circuit électrique.

Des différences vont apparaître lorsque nous examinerons les différentes natures des points de branchement et la relation qui relie les différentes grandeurs rencontrées le long d'une maille.

a) Nature des points de branchement.

— Un point de branchement peut tout d'abord permettre la *distribution* d'une grandeur déterminée dans les autres branches qui concourrent en ce point.

Supposons, par exemple, que les différentes grandeurs soient des déplacements, un levier à bras multiples, renvoi de sonnette à plusieurs bras, permettrait de distribuer l'un des déplacements choisi arbitrairement dans les autres branches.

Si n est le nombre des branches concourrant en un tel point, les différentes grandeurs $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots\ldots, \varepsilon_n$ qui apparaissent sur ces branches sont liées par $n - 1$ relations indépendantes de forme :

$$\varepsilon_n = a_1\varepsilon_1 = a_2\,\varepsilon_2 = \ldots\ldots\ldots = a_{n-1}\,\varepsilon_{n-1} \quad (96)$$

Un tel point de branchement sera appelé « *Point de distribution* » pour souligner son caractère spécifique.

Par définition, un point de distribution à n branches établit entre les grandeurs des branches qui convergent en ce point $(n - 1)$ relations linéaires indépendantes de forme (96).

Autre exemple : un potentiomètre à prises multiples permet de distribuer des fractions de la tension appliquée à ses bornes extrêmes. Cet exemple, cependant, prête à une légère critique, le rôle des différentes tensions n'étant pas rigoureusement symétrique. Il suffirait de remplacer le potentiomètre par une bobine d'inductance à prises multiples et de considérer un système de tension si-

nusoïdale d'amplitudes variables pour que la symétrie des différentes tensions fût rigoureusement respectée.

— Un point de branchement peut, par contre, assurer une relation de *composition* entre les différentes grandeurs des branches qui convergent vers lui sous la forme *d'une seule* relation linéaire entre ces grandeurs.

En imaginant toujours que ces grandeurs sont des déplacements, un point de branchement de cette nature serait constitué par un système de palonniers.

Si n est le nombre des branches concourant en un tel point, les différentes grandeurs $\varepsilon_1\ \varepsilon_2, \ldots\ \varepsilon_n$ qui apparaissent sur ces branches sont liées par une seule relation linéaire de forme :

$$\varepsilon_n = a_1\,\varepsilon_1 + a_2\,\varepsilon_2 + \ldots\ldots + a_{n-1}\,\varepsilon_{n-1} \qquad (97)$$

Un tel point de branchement sera appelé « *Point de composition* » pour souligner son caractère spécifique.

Par définition, un point de composition à n branches établit entre les grandeurs des branches qui convergent en ce point une seule relation linéaire de forme (97).

Nous appellerons « Ordre » d'un point de branchement, le nombre des relations linéaires indépendantes qu'il définit.

Un point de Distribution à n branches sera d'ordre $n - 1$.
Un point de Composition sera toujours d'ordre 1.

Ainsi nous pouvons distinguer, dans le circuit de régulation *deux natures différentes* de points de branchement, alors qu'il n'existe qu'*une seule nature* des sommets dans le circuit électrique. C'est une différence importante.

b) Représentation schématique des points de branchement.

Point de distribution.

Par définition, un tel point de branchement, distribue la grandeur d'une branche déterminée dans les $(n - 1)$ autres branches qui se raccordent en ce point, au moyen de $n - 1$ relations de forme :

$$\varepsilon_n = a_1\,\varepsilon_1 = a_2\,\varepsilon_2 = \ldots\ldots\ldots = a_{n-1}\,\varepsilon_{n-1} \qquad (96)$$

ε_n est la grandeur à distribuer qui provient de la *sortie* d'un élément.

$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots \varepsilon_{n-1}$ sont les grandeurs distribuées qui seront appliquées à l'*entrée* de l'élément des branches correspondantes.

Le point de distribution se comporte donc comme un ensemble de $n-1$ éléments dépendants de rapport de transmission $1/a_1$ $1/a_2 \ldots \ldots 1/a_{n-1}$ rayonnant autour de la branche contenant la grandeur à distribuer.

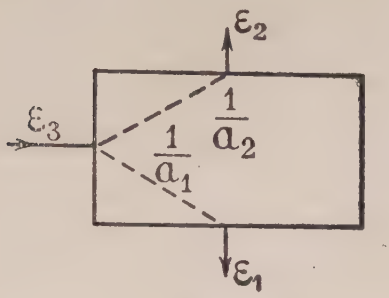


FIG. 18. — Représentation schématique d'un point de distribution.

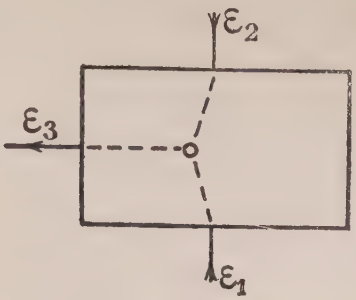


FIG. 19. — Représentation schématique d'un point de composition.

Nous pourrons le représenter par le schéma de la figure 18 où la flèche « entrante » indique la grandeur à distribuer et les flèches « sortantes » les grandeurs distribuées.

Point de composition.

Par définition, un tel point de branchement compose les différentes grandeurs provenant de $(n-1)$ branches en une grandeur unique appliquée à la $n^{ième}$ au moyen d'une relation de forme :

$$\varepsilon_n = a_1 \varepsilon_1 + a_2 \varepsilon_2 + \ldots\ldots + a_{n-1} \varepsilon_{n-1} \qquad (97)$$

$\varepsilon_1 \varepsilon_2 \ldots \varepsilon_{n-1}$ sont les grandeurs à composer qui proviennent de la *sortie* de $n-1$ éléments

ε_n est la grandeur composée qui sera appliquée à l'*entrée* de l'élément de la $n^{ième}$ branche.

Le point de composition se comporte comme un élément dépendant unique à plusieurs grandeurs d'entrée dont les rapports de transmission partiels sont

$$P_{ni} = a_i$$

Nous pourrons le représenter par le schéma de la figure 19 où les

flèches « entrantes » indiquent les grandeurs à composer et la flèche « sortante » la grandeur composée.

c) Condition de compatibilité.

Du fait des deux natures de points de branchement, on peut se demander s'il est possible de constituer un circuit de régulation où le nombre des points de branchement se répartit arbitrairement en points de distribution et points de composition.

Considérons un circuit de régulation complexe comportant b branches, soit b éléments, p points de composition et q points de distribution d'ordres $m_1\ m_2 \ldots\ m_q$.

Le nombre total des relations indépendantes que l'on peut écrire doit être égal à celui des grandeurs du circuit pour que l'assemblage proposé soit compatible.

Chaque branche contenant 2 grandeurs, le nombre total des grandeurs est 2 b.

Chaque branche fournit une relation fonctionnelle entre grandeurs d'entrée et grandeurs de sortie, soit b relations pour l'ensemble des branches.

Les p points de composition fournissent p relations.

Les q points de distribution fournissent $\sum_1^q m_i$ relations. On doit donc avoir :

$$2b = b + p + \sum_1^q m_i \qquad (98)$$

ou :

$$b = p + \sum_1^q m_i$$

pour que l'assemblage proposé soit compatible.

La relation 98 exprime la *condition de compatibilité* du circuit de régulation complexe formé d'éléments à une seule grandeur de même espèce :

« La somme des ordres des points de branchement doit être égale au nombre des branches du circuit ».

d) Mise en parallèle de deux branches entre deux points de distribution.

Rien n'empêche, *a priori* d'imaginer un circuit de régulation comportant plusieurs branches en parallèle entre deux points de branchement.

Si ces points de branchement sont des points de distribution, les grandeurs, aux mêmes extrémités des branches parallèles sont maintenues dans un rapport constant par la nature même des points de distribution.

On pourrait objecter qu'une telle disposition serait contraire à l'utilisation des points de distribution qui, en principe, comportent une entrée et plusieurs sorties. Dans le cas contraire, l'un des points de distribution aurait un fonctionnement inversé, il comporterait au moins deux entrées. Cependant, cette disposition pourrait être considérée comme le dédoublement d'une branche contenant un élément dépendant, et sous cet angle, ce problème mérite d'être examiné.

Soit ε_1 ε_2 les grandeurs d'entrée, σ_1 σ_2 les grandeurs de sortie de deux éléments dépendants reliés à deux points de distribution.

Grandeurs d'entrée et grandeurs de sortie sont maintenues dans un rapport constant par la nature même des points de distribution

$$\frac{T(\varepsilon_2)}{T(\varepsilon_1)} = \alpha \qquad \frac{T(\sigma_2)}{T(\sigma_1)} = \beta \qquad (99)$$

la relation fondamentale de l'élément dépendant peut s'écrire :

$$\frac{T(\sigma_1)}{T(\varepsilon_1)} = P_{D1} - \frac{[I]_{D1}}{\varphi_{\sigma_1} T(\varepsilon)_1} \quad \text{pour l'élément 1}$$

$$\frac{T(\sigma_2)}{T(\varepsilon_2)} = P_{D2} - \frac{[I]_{D2}}{\varphi_{\sigma_2} T(\varepsilon_2)} \quad \text{pour l'élément 2}$$

D'où, d'après (99) :

$$\frac{P_{D1} - \dfrac{[I]_{D1}}{\varphi_{\sigma 1} T(\varepsilon_1)}}{P_{D2} - \dfrac{[I]_{D2}}{\alpha \varphi_{\sigma 2} T(\varepsilon_1)}} = \frac{\alpha}{\beta} \qquad (100)$$

et en résolvant par rapport à $T(\varepsilon_1)$:

$$T(\varepsilon_1) \frac{\beta \dfrac{[I]_{D1}}{\varphi_{\sigma 1}} - \dfrac{[I]_{D2}}{\varphi_{\sigma 2}}}{\beta P_{D1} - \alpha P_{D2}} \qquad (101)$$

Les seules grandeurs qui peuvent franchir le point de branchement sont celles dont les transformées, à un coefficient près, satisfont à la relation 101. Ce sont les grandeurs définies par les racines

de l'équation $\beta P_{D1} - \alpha P_{D2} = 0$ (102). Les deux branches doivent être considérées, du point de vue de la condition de compatibilité, comme une branche unique et l'ordre des deux points de distribution doit être abaissé d'une unité.

Un cas particulier intéressant est celui où les deux éléments dépendants ont des structures exactement proportionnelles dans le rapport $\frac{\alpha}{\beta}$. Le dénominateur de 101 est nul pour toute valeur de p ainsi que son numérateur.

Les deux éléments dépendants se comportent alors comme un élément unique qui transmet toutes les formes de grandeurs.

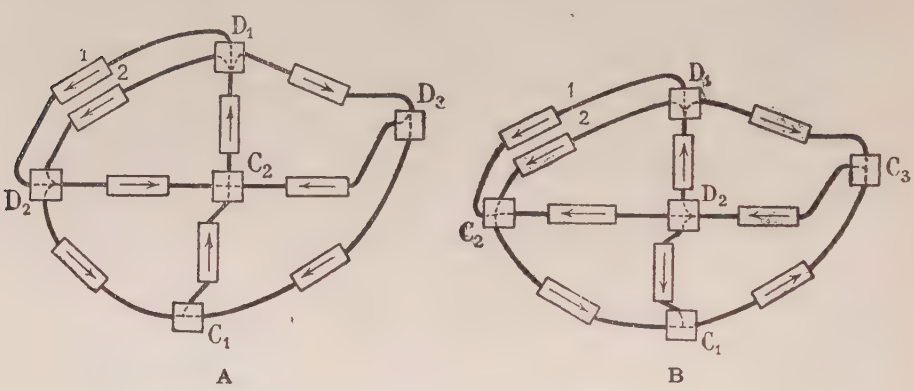


FIG. 20. — Condition complémentaire :
chaque maille doit contenir au moins un point de composition.

A. Condition complémentaire non satisfaite.
Les branches 1 et 2 se comportent comme une seule branche avec effet de filtrage.
Condition de compatibilité satisfaite (8 branches).

B. Condition complémentaire satisfaite.
Les branches 1 et 2 se comportent comme des branches indépendantes.
Condition de compatibilité satisfaite (9 branches).
Points de branchement D_2 et C_2 permutés.

On peut éviter les complications qui résultent du dédoublement de certaines branches en imposant au circuit de régulation de satisfaire à la condition complémentaire suivante :

« Dans toute maille du circuit de régulation, on doit rencontrer au moins un point de composition ».

La répartition des points de distribution et de composition dont les nombres et les ordres respectifs doivent satisfaire à la condition

de compatibilité n'est pas indifférente, la condition complémentaire précédente doit être aussi satisfaite.

Les exemples de la figure 20 précisent, dans un cas concret, le sens de cette dernière condition.

e) Relation entre les différentes grandeurs rencontrées le long d'une maille.

Nous cherchons la relation qui joue le rôle de la seconde loi de Kirchhoff dans le cas du circuit électrique.

Commençons tout d'abord par examiner le cas du circuit de régulation canonique qui ne comprend qu'une seule maille composée de deux éléments : un élément semi-libre, un élément dépendant.

La relation fondamentale de l'élément semi-libre, que nous connaissons déjà, est :

$$T(\rho) = \frac{1}{P_L} T(\gamma) + [\,I\,]_L$$

La relation fondamentale de l'élément dépendant est de même

$$T(\sigma) = P_D\, T(\varepsilon) - \frac{[\,I\,]_D}{\varphi_\sigma}$$

La connexion de ces deux éléments impose les identités

$$\varepsilon \equiv \gamma \qquad \sigma \equiv \rho$$

Remplaçons, pour simplifier l'écriture $\frac{[\,I\,]_D}{\varphi_\sigma}$ par $[\,I'\,]_D$; $[\,I\,]'_D$ représente la transformée de l'effet des conditions initiales de l'élément dépendant ramené à la sortie de cet élément.

En combinant les relations fondamentales des deux éléments et en tenant des identités $\varepsilon \equiv \gamma$; $\sigma \equiv \rho$ nous obtenons la relation de la maille rapportée à la grandeur γ :

$$P_D\, T(\gamma) - [\,I\,]'_D = \frac{1}{P_L}\, T(\gamma) + [\,I\,]_L$$

$$P_L\, P_D\, T(\gamma) - T(\gamma) = P_L\, ([\,I\,]_L + [\,I\,]'_D) \qquad (103)$$

$P_L\, P_D\, T(\gamma)$ représente la transformée de γ après passage à travers un élément dépendant partant du repos dont le rapport de transmission serait égal au rapport global de transmission des deux éléments de la maille.

Nous pouvons considérer que $P_L\, P_D\, T(\gamma)$ représente la transformée de γ après *circulation* le long de la maille.

P_L ($[I]_L + [I]'_D$) représente la transformée de l'effet des conditions initiales et de l'évolution de la grandeur libre dans les éléments de la maille, ramenée au point de mesure de γ.

En conséquence, la relation 103 peut s'interpréter de la façon suivante :

« L'excès de la transformée de la grandeur réglée γ après circulation autour de la maille sur la transformée de cette grandeur avant circulation est égal à la transformée des conditions initiales et de l'évolution de la grandeur libre dans les éléments de la maille, ramenée au point de mesure de la grandeur γ. »

Examinons maintenant le cas général d'une maille quelconque dans un circuit de régulation complexe formé d'éléments à une seule grandeur.

Soit une maille comprenant (fig. 21) :

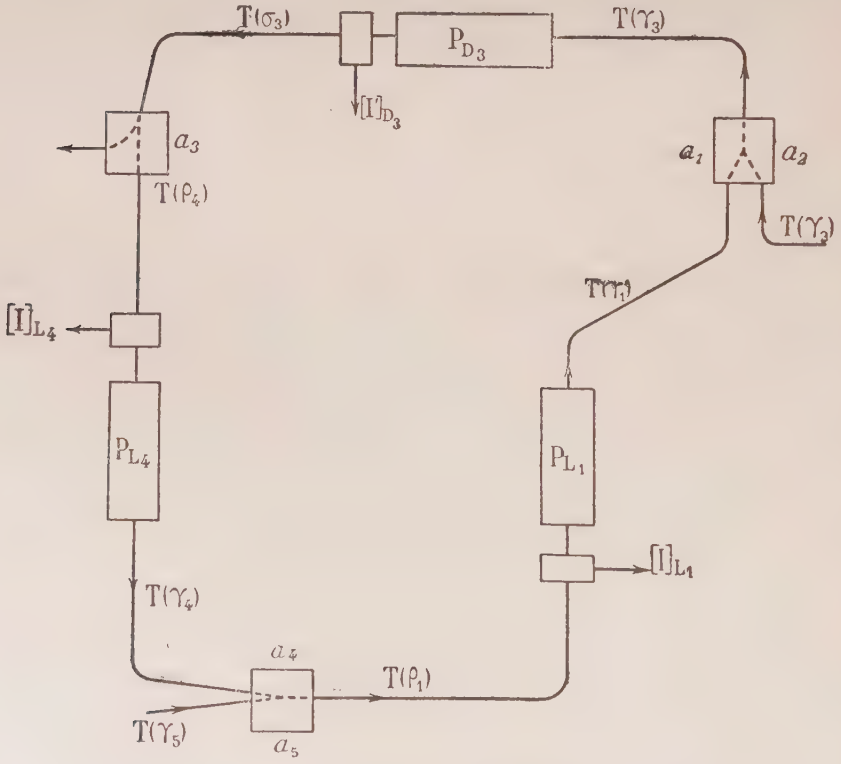


Fig. 21. — Maille comprenant : deux éléments semi-libres, un élément dépendant, deux points de composition et un point de distribution.

deux éléments semi-libres d'indice 1 et 4 ;
un élément dépendant d'indice 3 ;
deux points de composition et un point de distribution.

Les relations fonctionnelles de ces différents éléments sont :

$$T(\rho_1) = \frac{1}{P_{L1}} T(\gamma_1) + [I]_{L1} \quad \text{pour l'élément semi-libre d'indice 1}$$
$$T(\gamma_3) = a_1 T(\gamma_1) + a_2 T(\gamma_2) \quad \text{pour le premier point de composition}$$
$$T(\sigma_3) = P_{D3} T(\gamma_3) - [I]'_{D3} \quad \text{pour l'élément dépendant}$$
$$T(\rho_4) = a_3 T(\sigma_3) \quad \text{pour le point de distribution}$$
$$T(\rho_4) = \frac{1}{P_{L4}} T(\gamma_4) + [I]_{L4} \quad \text{pour le second élément semi-libre}$$
$$T(\rho_1) = a_4 T(\gamma_4) + a_5 T(\gamma_5) \quad \text{pour le second point de composition.}$$

En choisissant γ_1, comme grandeur de référence et en éliminant les autres grandeurs, à l'exception de γ_2 et γ_5, il vient :

$$(P_{L1} a_4 P_{L4} a_3 P_{D3} a_1) T(\gamma_1) - T(\gamma_1) + (P_{L1} a_4 P_{L4} a_3 P_{D3} a_2) T(\gamma_2) + (P_{L1} a_5) T(\gamma_5) = P_{L1} [I]_{L1} + (P_{L1} a_4 P_{L4}) [I]_{L4} + P_{L1} a_4 P_{L4} a_3 [I]'_{D3} \qquad (104)$$

Cette dernière relation s'interprète de la façon suivante :

« L'excès de la transformée de la grandeur de référence, après circulation complète le long de la maille sur la transformée de cette grandeur avant circulation, augmentée de la somme des circulations partielles des grandeurs qui pénètrent dans la maille aux points de composition est égale à la somme des transformées des conditions initiales et de l'évolution des grandeurs libres des éléments de la maille ramenées au point de mesure de la grandeur de référence. »

Telle est la forme générale de la loi, qui, dans le cas du circuit de régulation, joue le rôle de la seconde loi de Kirchhoff dans le cas du circuit électrique.

2. Le circuit de régulation complexe formé par la réunion d'éléments semi-libres et d'éléments dépendants contenant plusieurs grandeurs de même espèce.

Les résultats précédents peuvent être étendus à un circuit de régulation complexe où les éléments constitutifs comportent plusieurs grandeurs de même espèce.

Chaque élément du circuit constitue encore une « branche » mais

cet élément, au lieu de ne comprendre qu'une seule grandeur d'entrée ou de sortie en comprendra plusieurs.

La composition d'un certain nombre de telles branches constitue donc un circuit de régulation sous sa forme la plus générale (fig. 22).

Cette forme est à rapprocher de celle des réseaux polyphasés dans le cas du circuit électrique, leurs propriétés pouvant être considé-

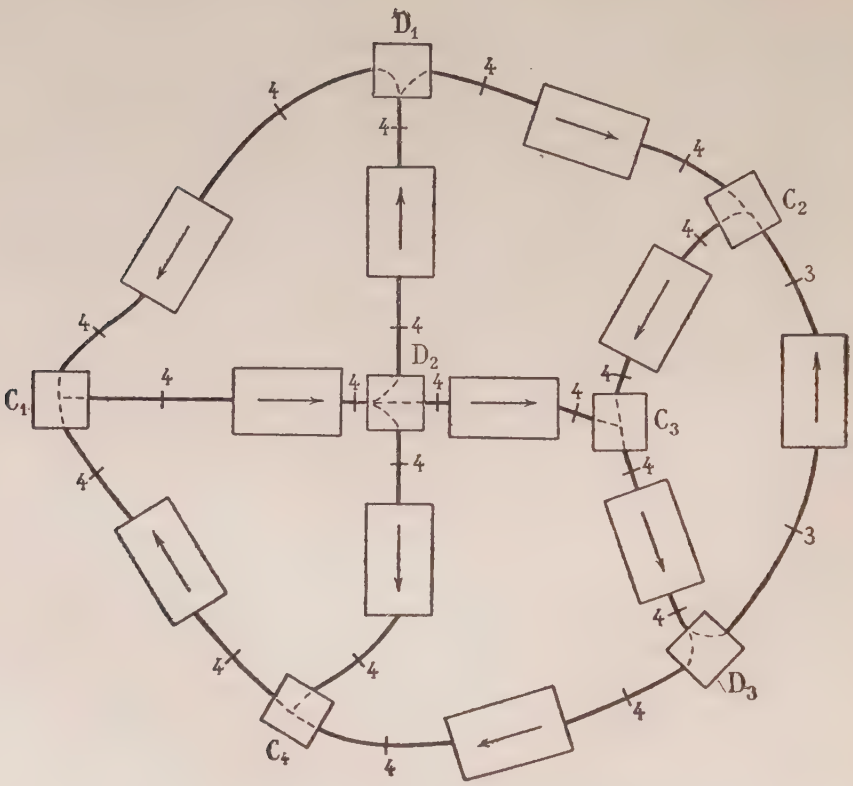


FIG. 22. — Circuit de régulation complexe formé par l'assemblage d'éléments semi-libres et dépendants à plusieurs grandeurs de même espèce.

11 branches — 7 points de branchement :

3 Points de distribution D_1 D_2 D_3 Ordres : 8-12-7.

4 Points de composition C_1 C_2 C_3 C_4 Ordre : 4.

Somme des ordres des points de branchement

$$8 + 12 + 7 + 16 = 43$$

Somme des ordres des éléments

$$4 \times 10 + 3 = 43$$

Condition de compatibilité satisfaite.

Condition complémentaire satisfaite.

rées comme une généralisation des propriétés du circuit électrique.

Nous allons transposer directement les résultats obtenus dans le cas d'éléments à une seule grandeur de même espèce au cas d'éléments qui en comportent plusieurs, en considérant les différentes grandeurs de même espèce d'un élément comme les composantes d'une grandeur unique représentant globalement les différentes grandeurs considérées. Nous aurons donc à examiner au préalable le cas particulier des différents types d'éléments et de points de branchement qui figurent dans le circuit de régulation.

a) Elément semi-libre a plusieurs grandeurs de même espèce.

Soit un tel élément à n grandeurs (3 dans le cas de la fig. 23 *a*).
Cet élément comporte :

n grandeurs d'entrée ρ_i qui constituent les grandeurs de réglage ;
n grandeurs de sortie γ_i qui constituent les grandeurs réglées ;
n grandeurs libres λ_i.

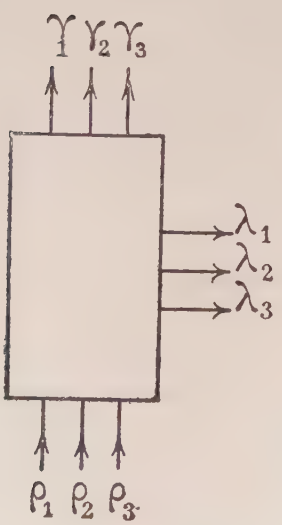


Fig. 23 *a*. — Elément semi-libre à trois grandeurs.

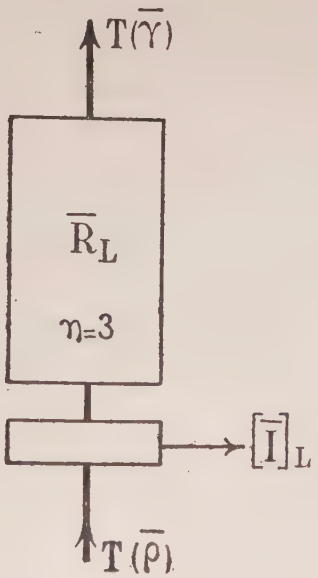


Fig. 23 *b*. — Représentation schématique globale de l'élément semi-libre à trois grandeurs.

Nous dirons que cet élément est d'ordre n.

Nous avons vu, dans la troisième partie, que les équations fonctionnelles d'un tel élément se présentent, dans le plan des transformées, par un système d'équations de forme :

$$T(\rho_1) = \frac{1}{P_{L11}} T(\gamma_1) + \frac{1}{P_{L21}} T(\gamma_2) + \ldots\ldots + \frac{1}{P_{Ln1}} T(\gamma_n) + [I]_L$$

. . . . . 8 . . . . . .

$$T(\rho_n) = \frac{1}{P_{L1n}} T(\gamma_1) + \frac{1}{P_{L2n}} T(\gamma_2) + \ldots\ldots + \frac{1}{P_{Lnn}} (\gamma_n) + [N]_L$$

Les crochets $[I]_L$ $[D]_L$ ..... $[N]_L$ représentent les transformées des conditions initiales et de l'évolution des grandeurs libres.

Ces relations peuvent se représenter sous une forme globale par une expression telle que :

$$T(\overline{\rho}) = \overline{R}_L^{-1} T(\overline{\gamma}) + [\overline{I}]_L \qquad (105)$$

dont les symboles représentent respectivement :

— $\overline{\rho}$ et $\overline{\gamma}$ les grandeurs globales d'entrée et de sortie dont les composantes sont, par hypothèses $\rho_1\ \rho_2$ ..... ρ_n ; $\gamma_1\ \gamma_2$ ..... γ_n.

— $\overline{R}_L^{-1}$ une matrice de transformation à n^2 éléments.

— $[\overline{I}]_L$ la transformée globale de l'évolution des grandeurs libres et des conditions initiales dont les composantes sont par hypothèse $[I]_L$ $[II]_L$... $[N]_L$.

La relation 105 définit donc sous une forme globale le comportement de l'élément semi-libre à n grandeurs ; elle peut être représentée par le schéma de la figure 23 *b*.

b) Elément dépendant a plusieurs grandeurs de même espèce.

Soit un tel élément à n grandeurs (3 dans le cas de la fig. 24 *a*). Cet élément comporte :

n grandeurs d'entrée ε_i ;
n grandeurs de sortie σ_i.

Nous avons vu que les équations fonctionnelles d'un tel élément se présentent, dans le plan des transformées, par un système d'équations de forme :

$$T(\sigma_1) = P_{D11}\,T(\varepsilon_1) + P_{D12}\,T(\varepsilon_2) + \ldots + P_{D1n}\,T(\varepsilon_n) - [\,I\,]'_D$$

. . . . . .

$$T(\sigma_n) = P_{Dn_1}\,T(\varepsilon_1) + P_{Dn_2}\,T(\varepsilon_2) + \ldots + P_{Dnn}\,T(\varepsilon_n) - [\,N\,]'_D$$

les crochets $[\,I\,]'_D\ [\,D\,]'_D \ldots\ldots [\,N\,]'_D$ représentant les transformées des conditions initiales ramenées à la sortie de l'élément.

Fig. 24 *a*. — Elément dépendant à trois grandeurs.

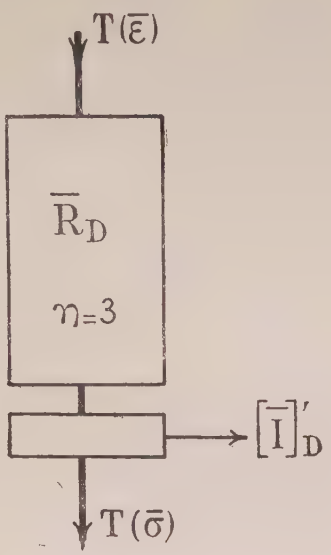


Fig. 24 *b*. — Représentation schématique globale de l'élément dépendant à trois grandeurs.

Ces relations peuvent se représenter sous une forme globale par une expression telle que :

$$T(\bar{\sigma}) = \bar{R}_D\,T(\bar{\varepsilon}) - [\,\bar{I}\,]'_D \qquad (106)$$

dont les symboles représentent respectivement :

$\bar{\varepsilon}$ et $\bar{\sigma}$ les grandeurs globales d'entrée et de sortie dont les composantes sont par hypothèse $\varepsilon_1\ \varepsilon_2 \ldots\ldots \varepsilon_n$; $\sigma_1\ \sigma_2 \ldots\ldots \sigma_n$

$\bar{R}_D$ une matrice de transformation à n^2 éléments

$[\,\bar{I}\,]'_D$ la transformée globale des conditions initiales ramenée à la sortie de l'élément, dont les composantes sont par hypothèse

$$[\,I\,]'_D\ [\,II\,]'_D \ldots\ldots [\,N\,]'_D$$

La relation (106) définit donc sous une forme globale le comportement de l'élément dépendant à n grandeurs, elle peut être représentée par le schéma de la figure 24 *b*.

c) Point de distribution.

Dans le cas du circuit de régulation où chaque branche ne comporte qu'une seule grandeur de même espèce, le point de distribution établit (p — I) relations linéaires indépendantes entre les grandeurs des p branches qui convergent vers lui.

$$\varepsilon_p = a_1\,\varepsilon_1 = a_2\,\varepsilon_2 = \ldots\ldots\ a_{p-1}\,\varepsilon_{p-1}$$

Par extension, le point de distribution du circuit de régulation où chaque branche comporte plusieurs grandeurs de même espèce, établit entre les p branches à n grandeurs qui convergent vers lui n (p — I) relations linéaires indépendantes, de forme :

$$\begin{aligned}
&\varepsilon^1_p = a^1_1\,\varepsilon^1_1 = a^1_2\,\varepsilon^1_2 = \ldots\ldots\ldots = a^1_{p-1}\,\varepsilon^1_{p-1}\\
&\varepsilon^2_p = a^2_1\,\varepsilon^2_1 = a^2_2\,\varepsilon^2_2 = \ldots\ldots\ldots = a^2_{p-1}\,\varepsilon^2_{p-1}\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\varepsilon^n_p = a^n_1\,\varepsilon^n_1 = a^n_2\,\varepsilon^n_2 = \ldots\ldots\ldots = a^n_{p-1}\,\varepsilon^n_{p-1}
\end{aligned} \qquad (107)$$

où ε^i_j représente la grandeur repère i dans la branche j et a^i_j le coefficient de proportionnalité ou rapport de transmission entre grandeurs repère i des branches p et j.

Si les différentes branches ne comportent pas le même nombre de grandeurs, certains coefficients sont nuls. Nous appellerons « ordre » du point de distribution le nombre total des relations indépendantes qu'il définit, soit n (p — 1) si les p branches ont toutes les n grandeurs, ou, $\Sigma(p_i - 1)$ dans le cas contraire, p_i étant le nombre de branches où figure la grandeur repère i.

La figure 25 *a* indique la représentation d'un point de distribution à 4 branches de 3 grandeurs (ordre 9) et la figure 25 *b* la représentation d'un point de distribution à 4 branches comprenant respectivement : 3, 3, 3 et 2 grandeurs (ordre 8).

L'ordre d'un point de distribution peut avoir des valeurs très diverses. On peut remarquer que le nombre maximum de grandeurs par branches doit se trouver dans deux branches au moins, sinon une grandeur resterait en suspend et ne traverserait pas le point de distribution.

Les relations 107 peuvent se mettre sous une forme globale représentée par des expressions telles que :

$$\overline{\varepsilon}_p = \overline{A}_1\,\overline{\varepsilon}_1 = \overline{A}_2\,\overline{\varepsilon}_2 = \ldots\ldots = \overline{A}_{p-1}\,\overline{\varepsilon}_{p-1} \qquad (108)$$

où $\overline{\varepsilon}_1\ \overline{\varepsilon}_2\ \ldots\ldots\ \overline{\varepsilon}_p$ représentent les grandeurs globales dans les p branches

$\overline{A}_1\ \overline{A}_2\ \ldots\ldots\ \overline{A}_{p-1}$ représentent $(p-1)$ matrices diagonales à n éléments.

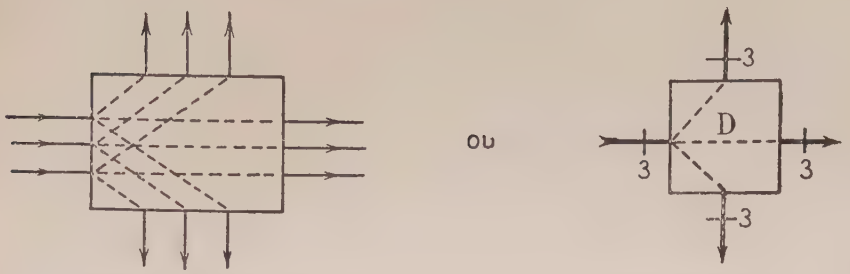


Fig. 25 *a*. — Point de distribution à 4 branches de 3 grandeurs.

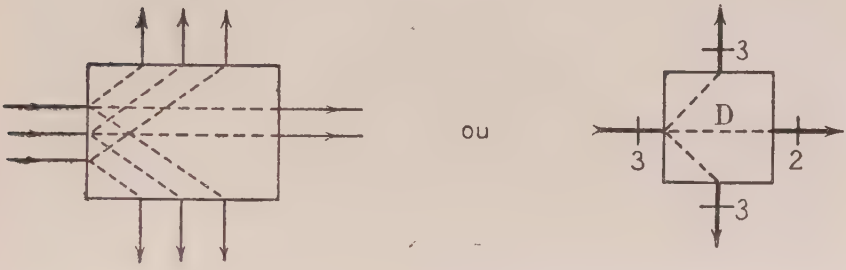


Fig. 25 *b*. — Point de distribution à 4 branches de 3, 3, 3 et 2 grandeurs.

d) Point de Composition.

Dans le cas du circuit de régulation où chaque branche ne comporte qu'une seule grandeur de même espèce, le point de composition établit une relation linéaire entre les grandeurs des p branches qui convergent vers lui

$$\varepsilon_p = a_1\,\varepsilon_1 + a_2\,\varepsilon_2 + \ldots\ldots\ldots + a_{p-1}\,\varepsilon_{p-1}$$

Par extension, le point de composition du circuit de régulation où chaque branche comporte plusieurs grandeurs de même espèce, établit entre les p branches à n grandeurs qui convergent vers lui, n relations linéaires indépendantes de forme :

$$\begin{aligned}
\varepsilon^1{}_p &= a^1{}_1\,\varepsilon^1{}_1 + a^1{}_2\,\varepsilon^1{}_2 + \ldots\ldots\ldots + a^1{}_{p-1}\,\varepsilon^1{}_{p-1}\\
\varepsilon^2{}_p &= a^2{}_1\,\varepsilon^2{}_1 + a^2{}_2\,\varepsilon^2{}_2 + \ldots\ldots\ldots + a^2{}_{p-1}\,\varepsilon^2{}_{p-1}\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\varepsilon^n{}_p &= a^n{}_1\,\varepsilon^n{}_1 + a^n{}_2\,\varepsilon^n{}_2 + \ldots\ldots\ldots + a^n{}_{p-1}\,\varepsilon^n{}_{p-1}
\end{aligned} \qquad (109)$$

où ε^i_j représente la grandeur repère i dans la branche j et a^i_j le coefficient de proportionnalité ou rapport partiel de transmission entre grandeurs repère i des branches p et j.

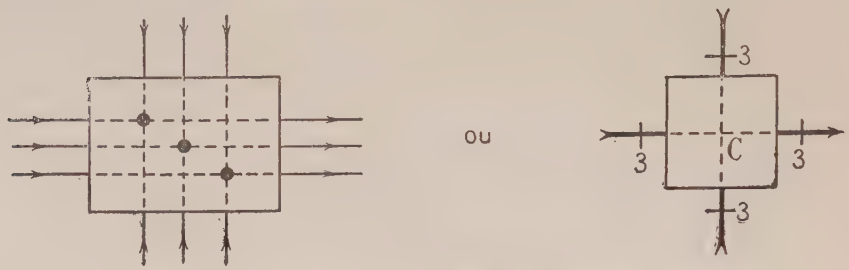


Fig. 26 *a*. — Point de composition à 4 branches de 3 grandeurs.

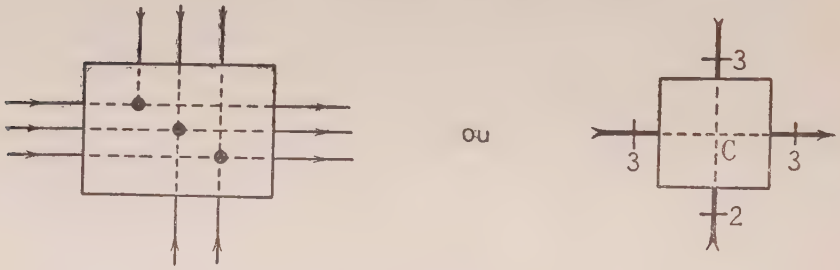


Fig. 26 *b*. — Point de composition à 4 branches de 3, 3, 3 et 2 grandeurs.

Si les différentes branches ne comportent pas le même nombre de grandeurs, certains coefficients sont nuls. Remarquons que le plus grand nombre de grandeurs par branche doit se retrouver dans *deux* branches au moins, sinon, une grandeur resterait en suspend et ne traverserait pas le point de composition.

Cependant, si le nombre maximum de grandeurs se retrouve dans deux branches, le point de composition se comporte comme un point de distribution pour la, ou les grandeurs qui ne figurent que dans ces deux branches. Pour éviter cette difficulté, nous ne donnerons le nom de « point de composition » qu'aux points de branchement dans lesquels le nombre maximum de grandeurs figure au moins dans trois branches.

Nous appellerons « Ordre de point de composition » le nombre de relations linéaires indépendantes qu'il définit. Le point de composition ayant au moins 3 branches à n grandeurs est d'ordre n.

Les relations (109) peuvent se mettre sous une forme globale représentée par une expression telle que :

$$\overline{\varepsilon}_p = \sum_{1}^{p-1} \overline{A}\ \overline{\varepsilon_i} \qquad (110)$$

où $\overline{\varepsilon}_1\ \overline{\varepsilon}_2 \ldots\ldots \overline{\varepsilon}_p$ représentent les grandeurs globales dans les p branches

$\overline{A}_1\ \overline{A}_2 \ldots \overline{A}_{p-1}$ $(p-1)$ matrices diagonales à n éléments.

La figure 26 *a* indique la représentation d'un point de composition à 4 branches de 3 grandeurs, et la figure 26 *b* la représentation d'un point de composition à 4 branches comportant respectivement 3, 3, 3 et 2 grandeurs.

a) Condition de compatibilité.

Pour qu'un assemblage donné d'éléments et de points de branchement constitue un circuit de régulation, il est nécessaire que le nombre total des relations définies par ces éléments et ces points de branchements soit égal au nombre total des grandeurs contenues dans les éléments du système. Considérons un assemblage de b branches, formées d'éléments à n grandeurs, au moyen de p points de distribution d'ordre m_{pi} et de q points de distribution d'ordre m_{qi}.

Le nombre total des grandeurs contenues dans les b éléments est :

$$2 \sum_{1}^{b} n_i$$

Chaque élément fournit n_i relations, soit $\sum n_i$ relations pour l'ensemble des éléments.

Les p points de distribution d'ordre m_{pi} fournissent au total $\sum_{1}^{p} m_{pi}$ relations.

De même, les q points de composition d'ordre m_{qi} fournissent au total $\sum_{1}^{q} m_{qi}$ relations.

On doit donc avoir :

$$2 \sum_{1}^{b} n_i = \sum_{1}^{b} n_i + \sum_{1}^{p} m_{pi} + \sum_{1}^{q} m_{qi}$$

ou :

$$\sum_{1}^{b} n_i = \sum_{1}^{p} m_{pi} + \sum_{1}^{q} m_{qi} \qquad (111)$$

pour que l'assemblage proposé soit compatible.

(111) exprime la condition de compatibilité des éléments constitutifs pour qu'ils forment un circuit de régulation complexe.

En remarquant que $\sum_{1}^{b} n_i$ représentent la somme des ordres des éléments, cette condition signifie que :

« Pour qu'un assemblage donné d'éléments et de points de branchements soit compatible, la somme des ordres des éléments doit être égale à la somme des ordres des points de branchement. »

f) Condition complémentaire.

Nous avons vu, dans le cas du circuit de régulation complexe formé d'éléments à une seule grandeur de même espèce qu'il fallait éviter que deux branches relient deux mêmes points de distribution sous peine d'introduire un effet de filtrage.

Cette complication peut être évitée en imposant au circuit de posséder, dans chacune de ses mailles, au moins un point de composition.

Il en est de même dans le cas du circuit de régulation complexe formé d'éléments à plusieurs grandeurs de même espèce : pour éviter que 2 branches puissent relier deux points de distribution, nous imposerons au circuit de vérifier la condition complémentaire suivante :

« Dans chaque maille du circuit de régulation complexe formé d'éléments à plusieurs grandeurs de même espèce, on doit rencontrer au moins un point de composition, se comportant comme tel pour toutes les grandeurs de la maille. »

g) Relation entre les différentes grandeurs rencontrées le long d'une maille.

Commençons par examiner le cas du circuit de régulation canonique ne comportant que deux éléments à plusieurs grandeurs de même espèce : un élément semi-libre, un élément dépendant. Ces deux éléments doivent être nécessairement de même ordre.

La relation fonctionnelle de l'élément semi-libre s'écrit sous forme globale :

$$T(\overline{\rho}) = \overline{R}_L^{-1}\, T(\overline{\gamma}) + [\overline{I}]_L \qquad (105)$$

Celle de l'élément dépendant s'écrit de même sous forme globale :

$$T(\bar{\sigma}) = \bar{R}_D\, T(\bar{\varepsilon}) - [\bar{I}]'_D \qquad (106)$$

La connexion de ces deux éléments introduit les identités :

$$\bar{\varepsilon} \equiv \bar{\gamma} \qquad \bar{\sigma} \equiv \bar{\rho}$$

il en résulte que la relation fonctionnelle de la maille constituée par ces deux éléments s'écrit :

$$\bar{R}_D\, T(\bar{\gamma}) - [\bar{I}]'_D = \bar{R}_L^{-1}\, T(\bar{\gamma}) + [\bar{I}]_L$$

ou, encore, en multipliant à gauche par $\bar{R}_L$

$$\bar{R}_L\, \bar{R}_D\, T(\bar{\gamma}) - T(\bar{\gamma}) = \bar{R}_L\, ([\bar{I}]_L + [\bar{I}]'_D) \qquad (112)$$

$\bar{R}_L\, \bar{R}_D\, T(\gamma)$

représente la transformée de la grandeur globale $\bar{\gamma}$ après circulation le long de la maille.

$\bar{R}_L\, ([\bar{I}]_L + [\bar{I}]'_D)$

représente la transformée globale de l'effet des conditions initiales et de l'évolution des grandeurs libres ramenées au point de mesure de la grandeur globale $\bar{\gamma}$.

En conséquence, la relation 112 peut s'interpréter de la façon suivante :

« L'excès de la transformée de la grandeur globale de référence après circulation complète le long de la maille sur la transformée de cette grandeur avant circulation, est égale à la transformée globale des conditions initiales et de l'évolution des grandeurs libres, ramenée au point de mesure de la grandeur globale de référence. »

Examinons maintenant le cas général d'une maille quelconque dans un circuit de régulation complexe formé d'éléments à plusieurs grandeurs de même espèce, et reprenons l'exemple de la maille étudiée précédemment en supposant que ses éléments contiennent plusieurs grandeurs de même espèce.

Cette maille comprend (figure 27) :

Deux éléments semi-libres d'indice 1 et 4.
Un élément dépendant d'indice 3.
Deux points de composition.
Un point de distribution.

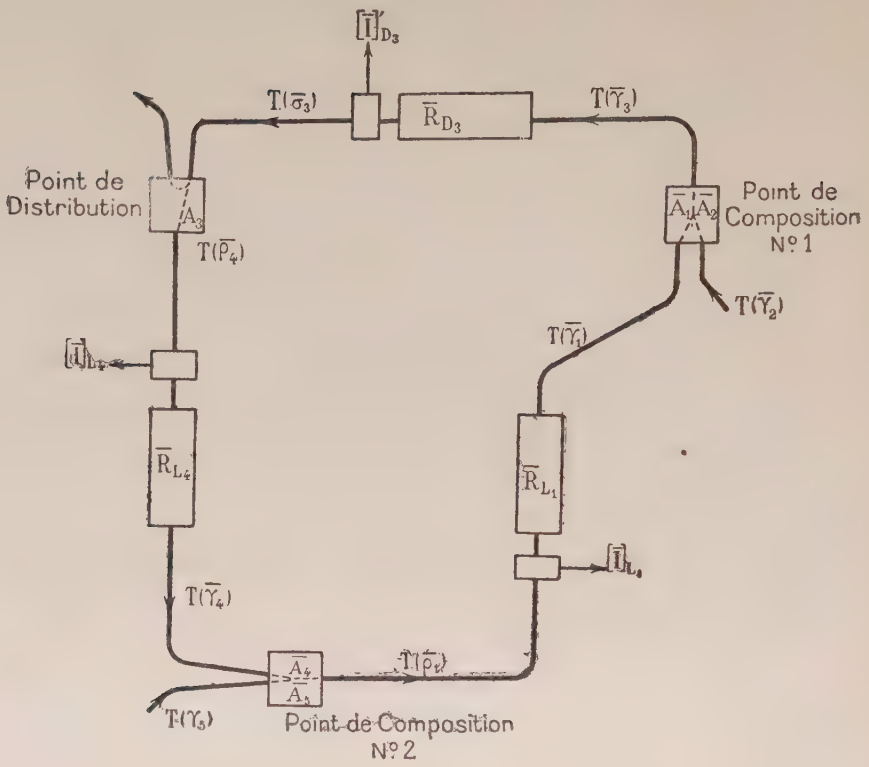


FIG. 27. — Maille comportant deux éléments semi-libres, un élément dépendant, deux points de composition, un point de distribution.

Les relations fonctionnelles de ces éléments, mises sous forme globale, sont :

$T(\overline{\rho_1}) = \overline{R}_{L_1}^{-1} T(\overline{\gamma_1}) + [\overline{I}]_{L1}$ pour l'élément semi-libre d'indice 1.

$T(\overline{\gamma_3}) = \overline{A}_1 T(\overline{\gamma_1}) + \overline{A}_2 T(\overline{\gamma_3})$ pour le premier point de composition.

$T(\overline{\sigma_3}) = \overline{R}_{D3} T(\overline{\gamma_3}) - [\overline{I}]'_{D3}$ pour l'élément dépendant d'indice 3.

$T(\overline{\rho_4}) = \overline{A}_3 T(\overline{\sigma_3})$ pour le point de distribution.

$T(\overline{\rho_4}) = \overline{R}_{L4}^{-1} T(\overline{\gamma_4}) + [\overline{I}]_{L4}$ pour le second élément semi-libre d'indice 4.

$T(\overline{\rho_1}) = \overline{A}_4 T(\overline{\gamma_4}) + \overline{A}_5 T(\overline{\gamma_5})$ pour le second point de composition.

En choisissant $\overline{\gamma_1}$ comme grandeur globale de référence et en éliminant les autres grandeurs, à l'exception de $\overline{\gamma_2}$ et de $\overline{\gamma_3}$ il vient :

$$(\overline{R}_{L1}\overline{A}_4\overline{R}_{L4}\overline{A}_3\overline{R}_{D3}\overline{A}_1)\,T(\overline{\gamma}_1) - T(\overline{\gamma}_1) + (\overline{R}_{L1}\overline{A}_4\overline{R}_{L4}\overline{A}_3\overline{R}_{D3}\overline{A}_2)\,T(\overline{\gamma}_2) + (\overline{R}_{L1}\overline{A}_5)\,T(\overline{\gamma}_5) = \overline{R}_{L1}[\overline{I}]_{L1} + (\overline{R}_{L1}\overline{A}_4\overline{R}_{L4})[\overline{I}]_{L4} + (R_{L1}\,A_4\,R_{L4}\,A_3)\,[\overline{I}]'_{D3} \quad (113)$$

cette relation s'interprète de la façon suivante :

« L'excès de la transformée de la grandeur globale de référence après circulation complète le long de la maille sur la transformée de cette grandeur avant circulation, augmenté de la somme des circulations partielles des transformées des grandeurs globales qui pénètrent dans la maille aux points de composition, est égale à la somme des transformées globales des conditions initiales et de l'évolution des grandeurs libres des éléments de la maille, ramenées au point de mesure de la grandeur globale de référence. »

Telle est la forme générale de la loi qui, dans le cas du circuit de régulation complexe formé d'éléments à plusieurs grandeurs de même espèce, joue le rôle de la seconde loi de Kirchhoff dans le cas du circuit électrique.

3. Comparaison entre le circuit électrique et le circuit de régulation.

L'étude qui vient d'être faite permet d'établir un tableau comparatif des propriétés du circuit électrique et du circuit de régulation.

Circuit électrique	Circuit de régulation
Nombre de mailles indépendantes $b - s + 1$	Nombre de mailles indépendantes $b - s + 1$
Une seule espèce de points de branchement ou sommets.	Deux espèces de points de branchement. Points de Distribution. Points de Composition.
Loi des Sommets ou 1° Loi de Kirchhoff $\sum_1^p i_p = 0$	Relation du point de Distribution. $\overline{\varepsilon}_p = \overline{A}_1\overline{\varepsilon}_1 = \overline{A}_2\overline{\varepsilon}_2 = \ldots = \overline{A}_{p-1}\,\overline{\varepsilon}_{p-1}$
	Relation du point de Composition. $\overline{\varepsilon}_p = \overline{A}_1\overline{\varepsilon}_1 + \overline{A}_2\overline{\varepsilon}_2 + \ldots + \overline{A}_{p-1}\,\overline{\varepsilon}_{p-1}$
N'existe pas	Condition de compatibilité $\sum_1^b h_i = \sum_1^p m_{pi} + \sum_1^q m_{qi}$

Circuit électrique	Circuit de régulation
	La somme des ordres des éléments doit être égale à la somme des ordres des points de branchement.
N'existe pas.	Condition complémentaire.
	« Au moins un point de composition par maille ».
Loi des mailles ou 2° Loi de Kirchhoff.	L'excès de la transformée de la grandeur globale de référence après circulation complète le long de la maille sur la transformée de cette grandeur avant circulation, augmentée des circulations partielles des transformées des grandeurs globales qui pénètrent dans la maille aux points de composition est égale à la somme des transformées globales des conditions initiales et de l'évolution des grandeurs libres des éléments de la maille ramenées au point de mesure de la grandeur globale de référence.
Au cours d'une circulation le long d'une maille, la somme algébrique des forces électromotrices est égale à la somme algébrique des chutes de tension dans les résistances de la maille.	

CINQUIÈME PARTIE

Exemples concrets

1. Éléments semi-libres.

a) Machine tournante soumise a un couple moteur et a un couple résistant.

Le couple moteur Cm est fonction d'une grandeur de réglage r. Le couple résistant Cr est fonction d'une grandeur libre l. Ces deux couples sont indépendants de la vitesse angulaire (fig. 28).

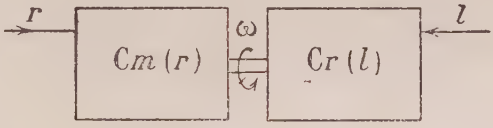


Fig. 28.

Relation fondamentale $I \dfrac{d\omega}{dt} + Cr = Cm$

I moment d'inertie des masses mobiles.

Nous rapportons, ω, Cr, Cm à un régime de référence caractérisé par

$$\omega = \omega_o,\ C_r = C_{ro},\ C_m = C_{mo} \text{ avec } C_{ro} = C_{mo}$$

nous choisirons comme grandeurs réduites les écarts relatifs autour du régime de référence

$$\frac{\omega - \omega_o}{\omega_o} \qquad \frac{C_r - C_{ro}}{C_{ro}} \qquad \frac{C_m - C_{mo}}{c_{mo}}$$

La fonction $Cr = Cr\ (l)$ est représentée par la courbe suivante pour de petits écarts (fig. 29) :

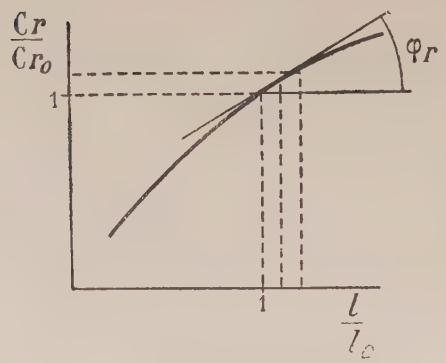


FIG. 29.

$$\frac{C_r - C_{ro}}{C_{ro}} = \text{tg}\ \varphi_r \frac{l - l_o}{l_o}$$

ou $$\frac{C_r - C_{ro}}{C_{ro}} = K_r \lambda \qquad \text{en posant} \begin{cases} \text{tg}\ \varphi_r = K_r \\ \dfrac{l - l_o}{l_o} = \lambda \end{cases}$$

pour une caractéristique linéaire $\varphi_r = C^{te}$.

La fonction $Cm = Cm\ (r)$ est représentée par la courbe suivante (fig. 30) :

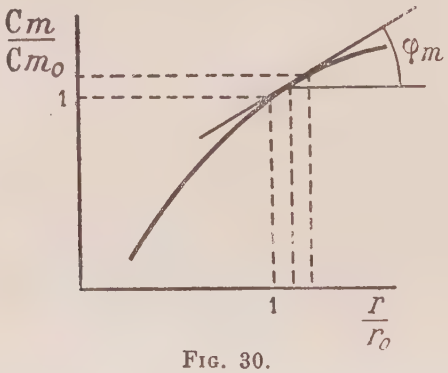


FIG. 30.

$$\frac{C_m - C_{mo}}{C_{mo}} = \text{tg}\ \varphi_m \frac{r - r_o}{r_o}$$

ou $$\frac{C_m - C_{mo}}{C_{mo}} = K_m \rho \qquad \text{en posant} \begin{cases} \text{tg}\ \varphi_m = K_m \\ \dfrac{r - r_o}{r_o} = \rho \end{cases}$$

pour une caractéristique linéaire $\varphi_m = C^{te}$

Portons $\dfrac{C_r}{C_{ro}} = 1 + K_r \lambda \qquad \dfrac{C_m}{C_{mo}} = 1 + K_m \rho$ dans (1)

$$I \frac{d\omega}{dt} + C_{ro}(1 + K_r \lambda) = Cm_o (1 + K_m \rho) \quad \text{avec} \quad Cr_o = Cm_o$$

ou encore

$$\frac{I\omega_o^2}{C_{ro}\,\omega_o}\,\frac{d}{dt}\left(\frac{\omega-\omega_o}{\omega_o}\right)+(1+K_r\lambda)=1+K_m\,\rho \qquad (2)$$

$\frac{I\omega_o^2}{C_{ro}\,\omega_o}$ représente le quotient du double de l'énergie cinétique de la partie mobile au régime nominal ($\omega=\omega_o$) par la puissance $P_o = C_{ro}\omega_o$ absorbée dans ce même régime. Ce quotient, homogène à un temps, s'appelle *temps caractéristique de l'inertie spécifique* T_i. (Ce temps est compris entre 2 et 5 secondes pour des groupes turbo-générateurs à vapeur, et entre 3 et 10 secondes pour des groupes turbo-générateurs hydrauliques).

Finalement, en remplaçant $\frac{\omega-\omega_o}{\omega_o}$ par γ, valeur réduite de la vitesse

$$T_i\,\frac{d\gamma}{dt}+K_r\lambda=K_m\,\rho$$

en appliquant la transformation de Laplace

$$T(\rho)=p\,\frac{T_i}{K_m}\,T(\gamma)+\frac{Kr}{K_m}\,T(\lambda)-\frac{T_i}{K_m}\,\gamma_o$$

$$T(\rho)=\frac{1}{P_L}\,T(\gamma)+[\,I\,]_L \quad \text{avec} \quad P_L=\frac{K_m}{pT_i}$$

$$[\,I\,]_L=\frac{K_r}{K_m}\,T(\lambda)-\frac{T_i}{K_m}\,\gamma_o.$$

Lieu caractéristique de l'inverse du rapport de transmission $\frac{1}{P_L}$ lorsque p décrit le contour de Bromwhich (fig. 31).

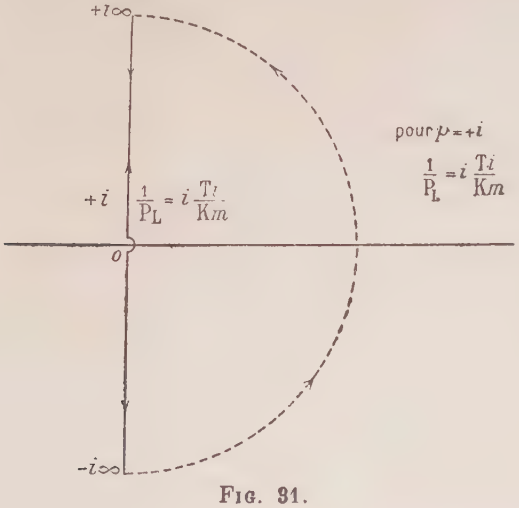


FIG. 31.

b) Machine tournante soumise a un couple moteur et a un couple résistant.

Le couple moteur C_m est fonction d'une grandeur de réglage r et de la vitesse angulaire ω. Le couple résistant C_r est fonction d'une grandeur libre l et de la vitesse angulaire ω (fig. 32).

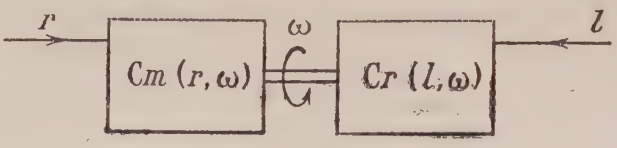


Fig. 32.

Le couple résistant C_r (l, ω) est représenté par une surface dont l'intersection par des plans parallèles aux plans l *o* C_r et ω *o* C_r donne les deux familles de courbes suivantes (fig. 33) :

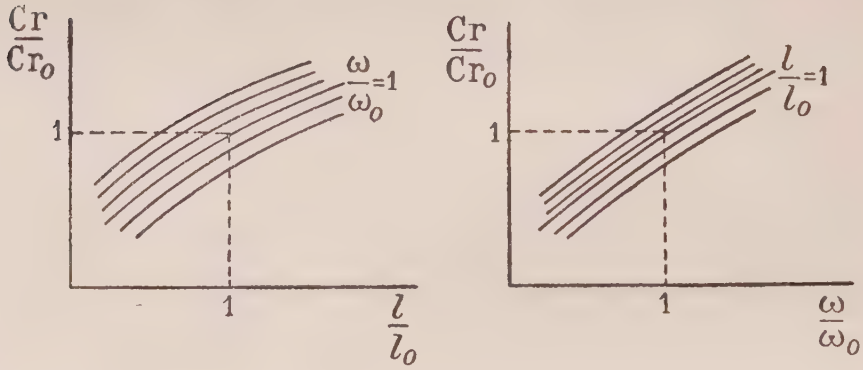


Fig. 33.

pour de petits écarts

$$\frac{C_r - C_{ro}}{C_{ro}} = \operatorname{tg} \varphi_r \frac{l - l_o}{l_o} + \operatorname{tg} \psi_r \frac{\omega - \omega_o}{\omega_o}$$

ou

$$\frac{C_r - C_{ro}}{C_{ro}} = K_r \lambda + \alpha_r \gamma \qquad \text{en posant} \quad \begin{cases} \operatorname{tg} \varphi_r = K_r \\ \operatorname{tg} \psi_r = \alpha_r \\ \dfrac{\omega - \omega_o}{\omega_o} = \gamma \end{cases}$$

Le couple moteur $C_m(r, \omega)$ est représenté par une seconde surface dont l'intersection par des plans parallèles aux plans r *o* C_m et ω *o* C_m donne les deux familles de courbes suivantes (fig. 34) :

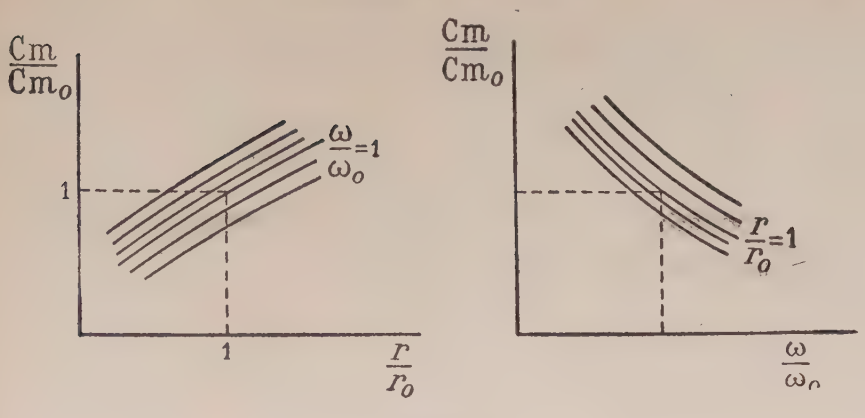


FIG. 34.

Le couple moteur décroît généralement avec la vitesse. pour de petits écarts

$$\frac{C_m - C_{mo}}{C_{mo}} = \operatorname{tg} \varphi_m \frac{r - r_o}{r_o} + \operatorname{tg} \psi_m \frac{\omega - \omega_o}{\omega_o}$$

ou

$$\frac{C_m - C_{mo}}{C_{mo}} = K_m \rho + \alpha_m \gamma \qquad \text{en posant} \begin{cases} \operatorname{tg} \varphi_m = K_m \\ \operatorname{tg} \psi_m = \alpha_m \\ \dfrac{\omega - \omega_o}{\omega_o} = \gamma \end{cases}$$

la relation fondamentale $I \frac{d\omega}{dt} + Cr = Cm$

peut alors s'écrire

$$I \frac{d\omega}{dt} + C_{ro} (1 + K_r \lambda + \alpha_r \gamma) = C_{mo} (1 + K_m \rho + \alpha_m \gamma)$$

avec $C_{ro} = C_{mo}$ ou encore

$$\frac{I\omega^2_o}{C_{ro}\omega_o} \frac{d}{dt} \left(\frac{\omega - \omega_o}{\omega_o} \right) + K_r \lambda + (\alpha_r - \alpha_m)\gamma = K_m \rho$$

$$T_i \frac{d\gamma}{dt} + (\alpha_r - \alpha_m)\gamma + K_r \lambda = K_m \rho$$

en appliquant la transformation de Laplace

$$T_i\, p T(\gamma) - T_i\, \gamma_o + (\alpha_r - \alpha_m)\, T(\gamma) + K_r\, T(\lambda) = K_m\, T(\rho)$$

$$T(\rho) = \left[p \frac{T_i}{K_m} + \frac{\alpha_r - \alpha_m}{K_m} \right] T(\gamma) + \frac{K_r}{K_m} T(\lambda) - \frac{T_i}{K_m} \gamma_o$$

$$T(\rho) = \frac{1}{P_L}\, T(\gamma) + [\,I\,]_L \qquad \text{avec} \qquad P_L = \frac{K_m}{pT_i + (\alpha_r - \alpha_m)}$$

$$[\,I\,]_L = \frac{K_r}{K_m}\, T(\lambda) - \frac{T_i}{K_m}\, \gamma_o$$

Lieu figuratif de l'inverse du rapport de transmission $\frac{1}{P_L}$ lorsque p décrit le contour de Bromwhich (fig. 35).

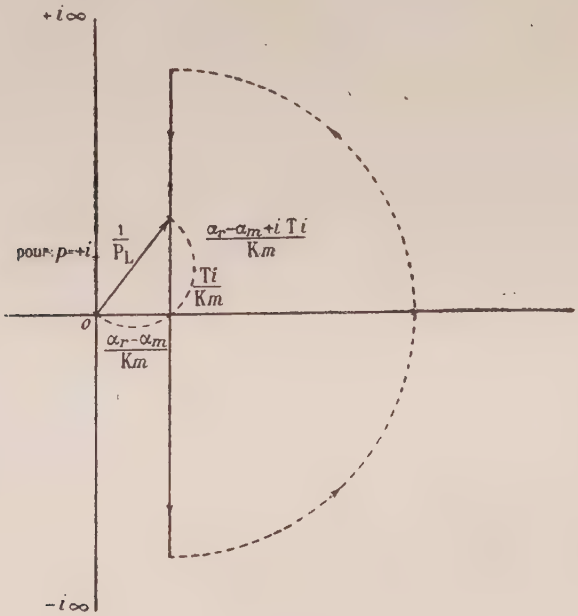


Fig. 35.

2. Eléments dépendants.

a) Régulateur de vitesse avec asservissement (fig. 36).

A point tachymétrique déplacement proportionnel à $\omega - \omega_o$
D point d'asservissement déplacement proportionnel à $s - s_o$.
SM servo-moteur contrôlé par le distributeur.

Un tel régulateur établit une liaison entre la vitesse ω et la course de la tige attelée au piston du servo-moteur.
Cette tige monte lorsque la vitesse décroît.

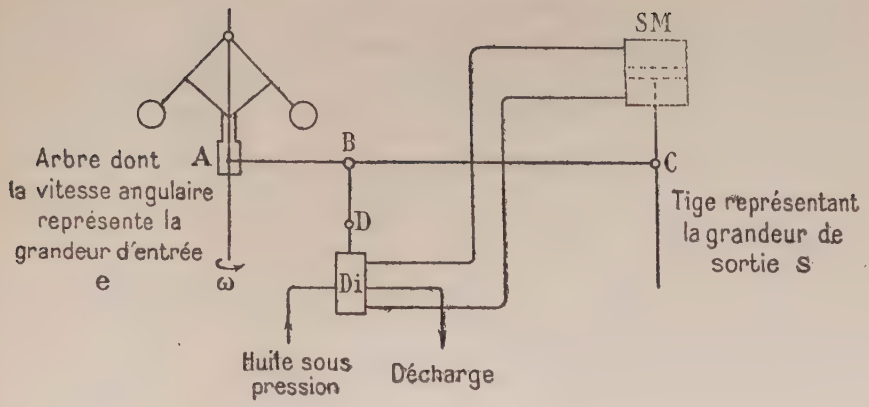


Fig. 36.

Pour la vitesse du régime de référence, ω_o, la course de la tige s est s_o.

Soit $A_oB_oC_o$ les positions des points ABC pour le régime de référence.

$A_1B_1C_1$ les positions des mêmes points à un instant donné (fig. 37).

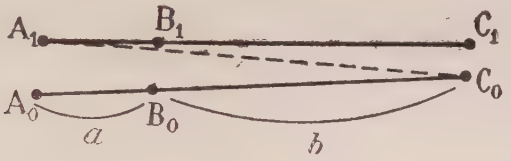


Fig. 37.

La course $x = B_1 B_o$ du tiroir du distributeur a pour expression

$$x = A_1A_o \frac{b}{a+b} + C_1C_o \frac{a}{a+b}$$

Or

$$A_1A_o = K(\omega - \omega_o)$$
$$C_1C_o = s - s_o$$

$$x = K(\omega - \omega_o) \frac{b}{a+b} + (s - s_o) \frac{a}{a+b}$$

La course maxima du distributeur x_m est obtenue pour une variation de vitesse $\beta(\omega_M - \omega_o)$ ω_M étant la vitesse qui, dans un régime stationnaire, annule s

$$x_m = \beta K (\omega_M - \omega_o) \frac{b}{a+b}$$

pour x_m le débit d'huile dans le cylindre du servo-moteur est maximum et la course s_o serait parcourue sans effet de l'asservissement en un temps T_s tel que $s_o = V_m T_s V_m$, étant la vitesse maximum de déplacement du piston.

La vitesse de déplacement du piston pour la course x du tiroir est proportionnelle à $\frac{x}{x_m}$

nous avons donc

$$\frac{ds}{dt} = -\frac{x}{x_m} v_m = -\frac{x}{x_m}\frac{s_o}{T_s}$$

avec le signe — car s diminue lorsque ω augmente.
ou encore

$$x = -\frac{x_m}{s_o} T_s \frac{ds}{dt}$$

en égalant les deux expressions de x

$$K(\omega - \omega_o)\frac{b}{a+b} + (s - s_o)\frac{a}{a+b} = -\frac{x_m}{s_o} Ts \frac{ds}{dt}$$

ce qui peut s'écrire

$$\frac{\omega - \omega_o}{\omega_M - \omega_o} K(\omega_M - \omega_o)\frac{b}{a+b} + \frac{s - s_o}{s_o} s_o \frac{a}{a+b} = -x_m T_s \frac{d}{dt}\left(\frac{s - s_o}{s_o}\right)$$

En divisant par $K(\omega_M - \omega_o)\frac{b}{a+b}$ et en remarquant :

1°) que $x_m = \beta K(\omega_M - \omega_o)\frac{b}{a+b}$

2°) que $s_o \frac{a}{a+b} = K(\omega_M - \omega_o)\frac{b}{a+b}$

puisqu'à l'écart de vitesse $(\omega_M - \omega_o)$ correspond, dans une suite de régimes stationnaires, la course s_o du piston du servo-moteur il vient :

$$\frac{\omega - \omega_o}{\omega_M - \omega_o} + \frac{s - s_o}{s_o} = -\beta T_s \frac{d}{dt}\left(\frac{s - s_o}{s_o}\right)$$

or

$$\frac{\omega - \omega_o}{\omega_M - \omega_o} = \frac{\omega - \omega_o}{\omega_o} \frac{\omega_o}{\omega_M - \omega_o} : \frac{\omega_M - \omega_o}{\omega_o}$$

représente la variation relative de vitesse entre les états stationnaires correspondant à $s = 0$ $\omega = \omega_M$, $s = s_o$ $\omega = \omega_o$

$\frac{\omega_M - \omega_o}{\omega_o}$ représente le « *Statisme du régulateur* » et l'on pose

$$\frac{\omega - \omega_0}{\omega_0} = \delta$$

finalement le fonctionnement du régulateur est défini par la relation

$$\frac{1}{\delta}\,\frac{\omega_M - \omega_0}{\omega_0} + \frac{s - s_0}{s_0} = -\,\beta T_s \frac{d}{dt}\left(\frac{s - s_0}{s_0}\right)$$

En posant $\dfrac{\omega - \omega_0}{\omega_0} = \varepsilon$ grandeur réduite d'entrée

$$\frac{s - s_0}{s_0} = \sigma \text{ grandeur réduite de sortie}$$

il vient : $$-\varepsilon = \delta\sigma + \beta\delta T_s \frac{d\sigma}{dt}$$

Mais $\beta\delta$ est une C^{te} :

$$\beta\delta = \frac{x_m}{K\omega_0}\,\frac{a+b}{b} = \delta'$$

En appliquant la transformation de Laplace :

$$(p\,\delta'\,T_s + \delta)\,T(\sigma) - \delta'\,T_s\sigma_0 = -\,T(\varepsilon)$$

$$T(\sigma) = P_D\,T(\varepsilon) - [\,I'\,]_D \qquad \text{avec} \qquad P_D = \frac{-1}{\delta + p\,\delta'\,T_s}$$

$$[\,I'\,]_D = -\,\frac{\delta'\,T_s\sigma_0}{\delta + p\,\delta'\,T_s}$$

Lieu figuratif du rapport de transmission P_D lorsque p décrit le contour de Bromwhich (fig. 38).

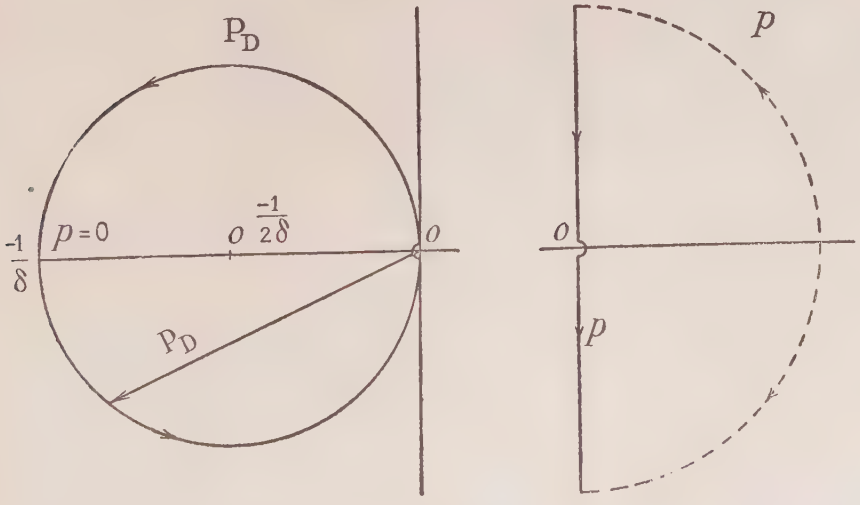


Fig. 38.

$$P_D = \frac{-1}{\delta + p\,\delta' Ts}$$

Lorsque p varie de $+ i\infty$ à $- i\infty$ en suivant l'axe des i, P_D décrit un cercle de rayon $\frac{1}{\delta}$ dont le centre est sur l'axe réel au point d'abscisse $\frac{-1}{2\delta}$.

Lorsque p passe de $- i\infty$ à $+ i\infty$ en suivant 1/2 cercle de rayon infini, P_D décrit un demi-cercle de rayon infiniment petit voisin de l'origine.

b) Régulateur de vitesse accélérotachymétrique (fig. 39).

Le déplacement du tiroir du distributeur Di est proportionnel à l'écart de vitesse $\omega - \omega_o$ par rapport au régime de référence ω_o et à l'accélération $\frac{d\omega}{dt}$

$$x = K_1(\omega - \omega_o) + K_2 \frac{d\omega}{dt}$$

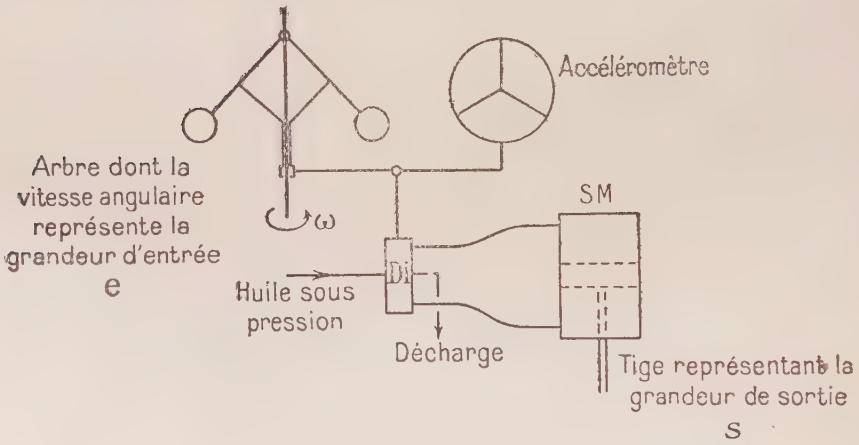


Fig. 39.

Soit ω_M la vitesse angulaire uniforme qui, agissant seule, entraînerait l'ouverture maximum, x_m du tiroir du distributeur

$$x_m = K_1(\omega_M - \omega_o)$$

pour l'ouverture x_m le temps de parcours de la course s_o de la tige solidaire du piston du servomoteur est T_s ;

pour l'ouverture x la vitesse de déplacement de la grandeur de sortie s est :

$$\frac{ds}{dt} = -\frac{x}{x_m}\frac{s_o}{T_s}$$

signe — car ω et s varient en sens contraire

$$x = -\frac{x_m T_s}{s_o}\frac{ds}{dt}$$

En égalant les deux expressions de x

$$K_1(\omega - \omega_o) + K_2\frac{d\omega}{dt} = -\frac{x_m}{s_o} T_s \frac{ds}{dt}$$

ce qui peut s'écrire :

$$\frac{\omega - \omega_o}{\omega_o} + \frac{K_2\omega_o}{K_1}\frac{d}{dt}\left(\frac{\omega - \omega_o}{\omega_o}\right) = -\frac{x_m T_s}{K_1\omega_o}\frac{d}{dt}\left(\frac{s - s_o}{s_o}\right)$$

Or

$$\frac{x_m}{K_1\omega_o} = \frac{K_1(\omega_M - \omega_o)}{K_1\omega_o} = \frac{\omega_M - \omega_o}{\omega_o} = \delta'$$

δ' est l'écart relatif de vitesse qui, agissant seul, entraîne l'ouverture maxima du distributeur.

Posons :

$$\frac{\omega - \omega_o}{\omega_o} = \varepsilon \qquad \frac{s - s_o}{s_o} = \sigma \qquad \frac{K_2}{K_1} = m$$

m homogène à un temps est le « temps de dosage » de l'effet accélérométrique.

Le fonctionnement du régulateur accélérotachymétrique est représenté par la relation :

$$\varepsilon + m\frac{d\varepsilon}{dt} = -\delta' T_s \frac{d\sigma}{dt}.$$

En appliquant la transformation de Laplace

$$(1 + mp)\,T(\varepsilon) - m\,\varepsilon_o = -p\,\delta' T_s\,T(\sigma) + \delta' T_s\,\sigma_o$$

$$T(\sigma) = \frac{-(1 + mp)}{p\,\delta'\,T_s} T(\varepsilon) + \frac{m\,\varepsilon_o + \delta' T_s\,\sigma_o}{p\,\delta'\,T_s}$$

$$T(\sigma) = P_D\,T(\varepsilon) - [I']_D \quad \text{avec} \quad P_D = -\frac{1 + mp}{p\,\delta' T_s}$$

$$[I']_D = -\frac{m\,\varepsilon_o + \delta' T_s\,\sigma_o}{p\delta' T_s}.$$

Lieu figuratif du rapport de transmission P_D *lorsque* p *décrit le contour de Bromwhich* (fig. 40).

$$P_D = -\frac{1 + mp}{p\delta' T_s}$$

Lorsque le module de p est infini $P_D = -\frac{m}{\delta' T_s}$

Lorsque $p = i\omega$ $\quad P_D = \frac{m}{\delta' T_s} + i\frac{1}{\delta' T_s \omega}$

Au voisinage de l'origine

(a infiniment petit du premier ordre) $p = a e^{i\theta}$

$$P_D = -\frac{m}{\delta' T_s} - \frac{e^{-i\theta}}{a\,\delta' T_s}.$$

Le lieu figuratif de P_D est alors le suivant :

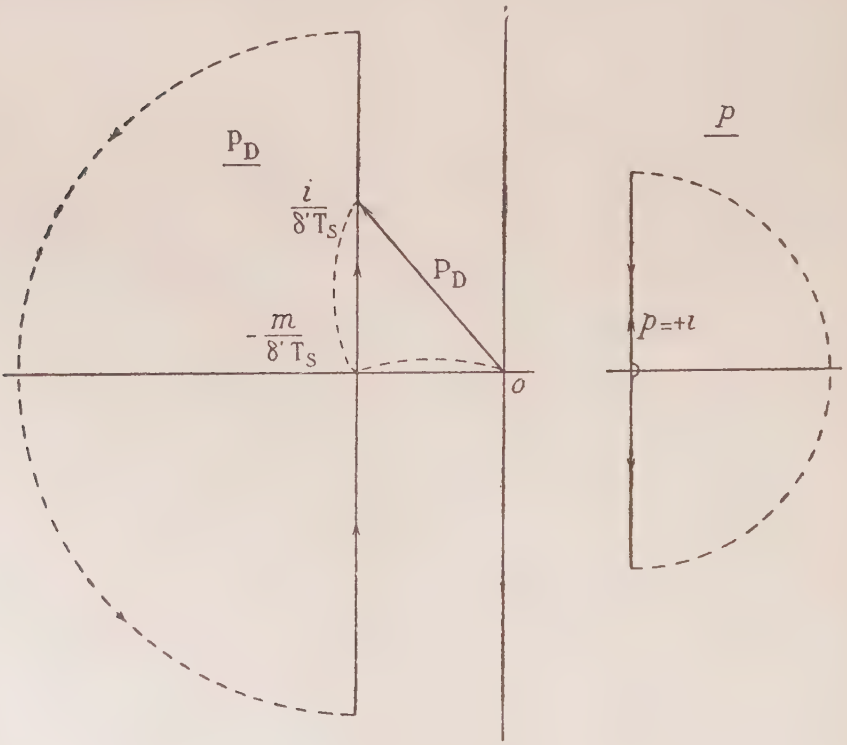


FIG. 40.

Constitution d'un circuit de Régulation
avec un élément semi-libre et un élément dépendant.

Le circuit de régulation est constitué par l'identité des grandeurs de sortie et d'entrée d'un élément semi-libre et d'un élément dépendant (fig. 41).

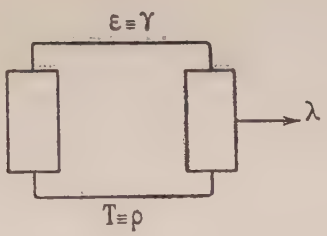


Fig. 41.

Dans le cas des exemples précédents, ces identités sont obtenues en reliant rigidement l'arbre de la machine à celui du régulateur de vitesse et la tige du servomoteur à la tige de l'organe de réglage du moteur suivant le schéma ci-dessous (Régulateur de vitesse avec asservissement) (fig. 42).

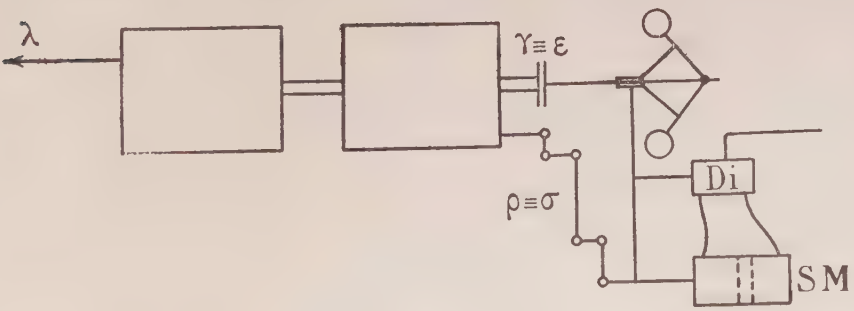


Fig. 42.

Le fonctionnement du système est alors déterminé par la relation qui se déduit des deux relations caractéristiques définissant l'élément semi-libre et l'élément dépendant.

Dans le cas de la machine tournante avec couples fonctions de la vitesse, on a :

$$T(\rho) = \left(p \frac{T_i}{K_m} + \frac{\alpha_r - \alpha_m}{K_m} \right) T(\gamma) + \frac{K_r}{K_m} T(\lambda) - \frac{T_i}{K_m} \gamma_0$$

Dans le cas du régulateur tachymétrique avec asservissement, on a :

$$T(\sigma) = \frac{-1}{\delta + p\,\delta' T_s}\,T(\varepsilon) - \frac{-\delta' T_s\,\sigma_o}{\delta + p\,\beta\delta\,T_s}$$

Les identités $\varepsilon \equiv \gamma$ $\sigma \equiv \rho$ permettent d'écrire, en remplaçant σ par ρ et ε par γ

$$\left[\frac{-1}{\delta + p\,\beta\,\delta\,T_s} - \left(\frac{\alpha_r - \alpha_m}{K_m} + p\,\frac{T_i}{K_m}\right)\right] T(\gamma) = \frac{K_r}{K_m}\,T(\lambda) - \frac{T_i}{K_m}\,\gamma_o - \frac{\delta' T_s\,\rho_o}{\delta + p\,\delta' T_s}$$

d'où :

$$T(\gamma) = \frac{\dfrac{K_r}{K_m}\,T(\lambda) - \dfrac{T_i}{K_m}\,\gamma_o - \dfrac{\delta' T_s\,\rho_o}{\delta + p\,\delta' T_s}}{\dfrac{-1}{\delta + p\,\delta' T_s} - \left(\dfrac{\alpha_r - \alpha_m}{K_m} + p\,\dfrac{T_i}{K_m}\right)}$$

ce qui correspond à la forme générale

$$T(\gamma) = \frac{[\,I\,]_L + [\,I'\,]_D}{P_D - \dfrac{1}{P_L}}$$

Condition de stabilité :

a) $\alpha_r - \alpha_m > 0$

Il suffit de se reporter aux lieux figuratifs de P_D et $\frac{1}{P_L}$ pour constater que la variation d'argument de $\left(P_D - \frac{1}{P_L}\right)$ est nulle lorsque p décrit le contour de Bromwhich. P_D n'ayant pas de pôle dans le $\frac{1}{2}$ plan positif, *le système dans ce cas est toujours stable.*

b) $\alpha_r - \alpha_m < 0$

Ce cas est celui d'une machine tournante qui serait instable en elle-même. L'augmentation de la vitesse entraînant une augmentation de l'excès du couple moteur sur le couple résistant (par exemple : moteur compound avec ampères-tours soustractifs).

Les lieux figuratifs de P_D et $\frac{1}{P_L}$ se coupent (fig. 43).

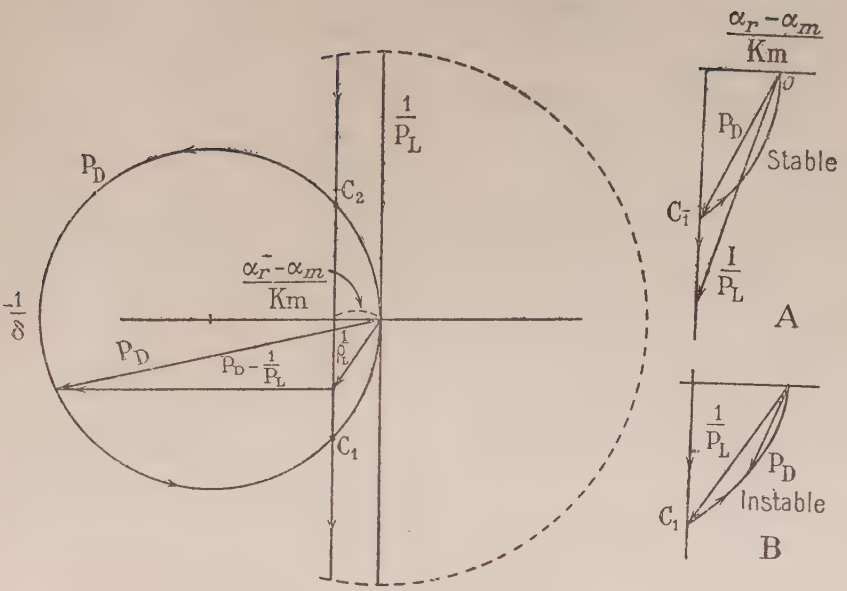


FIG. 43.

Si $\frac{1}{P_L}$ passe en c_1 *avant* P_D, lorsque p varie de 0 à $-i\infty$, la variation d'argument de $\left(P_D - \frac{1}{P_L}\right)$ est nulle lorsque p décrit le contour de Bromwhich, et le système est stable (fig. 43, A).

Si $\frac{1}{P_L}$ passe en C_1 *après* P_D la variation d'argument de $\left(P_D - \frac{1}{P_L}\right)$ est égale à 4π lorsque p décrit le contour de Bromwhich et le système est instable (fig. 43, B).

La limite de stabilité correspond donc au passage simultané de P_D et $\frac{1}{P_L}$ en C_1 (ou C_2).

Dans ce cas :

$p = -i\ \omega_c$.

$$\frac{-1}{\delta + \delta' T_s (-i\omega_c)} = \frac{\alpha_r - \alpha_m}{K_m} + \frac{T_i}{K_m}(-i\omega_c)$$

$$-\frac{\delta + i\,\delta' T_s \omega_c}{\delta^2 + \delta'^2 T_s^2 \omega_c^2} = \frac{\alpha_r - \alpha_m}{K_m} - i\frac{Ti}{Km}\omega_c$$

$$\frac{-\delta}{\delta^2 + \delta'^2 T_s^2 \omega_c^2} = \frac{\alpha_r - \alpha_m}{K_m} \quad ; \quad \frac{\delta' T_s \omega_c}{\delta^2 + \delta'^2 T_s^2 \omega_c^2} = \frac{T_i}{K_m}\omega_c$$

$$\frac{-\delta T_i}{\delta' T_s} = \alpha_r - \alpha_m$$

par conséquent, le système est stable si

$$\alpha_r - \alpha_m > -\frac{T_i \delta}{\delta' T_s}.$$

La condition de stabilité dépend de δ ; en représentant par $|\alpha_r - \alpha_m|$ la valeur absolue de $\alpha_r - \alpha_m$ cette condition s'écrit pour $\alpha_r - \alpha_m < 0$

$$|\alpha_r - \alpha_m| < \frac{T_i \delta}{\delta' T_s}.$$

Expression du régime transitoire dans le cas d'une variation brusque de la grandeur libre.

Soit a la valeur finale de λ après un saut brusque

$$T(\lambda) = \frac{a}{p} \qquad a = \frac{l - l_o}{l_o}$$

La transformée de γ s'écrit :

$$T(\gamma) = -\frac{\frac{K_r}{K_m} a(\delta + p\delta' T_s) - \frac{T_i}{K_m} p(\delta + p\delta' T_s)\gamma_o - p\delta' T_s \rho_o}{p\left[1 + (\delta + p\delta' T_s)\left(\frac{\alpha_r - \alpha_m}{K_m} + p\frac{T_i}{K_m}\right)\right]} = -\frac{H(p)}{G(p)}$$

$G(p)$ a trois racines : $r_1 = 0$ r_2 et r_3
r_2 et r_3 étant les racines de

$$1 + (\delta + p\delta' Ts)\left(\frac{\alpha_r - \alpha_m}{K_m} + p\frac{T_i}{K_m}\right)$$

L'expression de γ en fonction du temps est alors :

$$\gamma = -\left[\frac{H(o)}{G'(o)} + \frac{H(r_2)}{G'(r_2)} e^{r_2 t} + \frac{H(r_3)}{G'(r_3)} e^{r_3 t}\right]$$

r_2 et r_3 ayant des parties réelles négatives, la valeur finale de γ est (cas d'un réglage stable)

$$\gamma_{\text{lim}} = -\frac{H(o)}{G'(o)}$$

Or

$$G'(p) = 1 + \frac{\delta(\alpha_r - \alpha_m)}{K_m} + 2p\left(\delta' T_s \frac{\alpha_r - \alpha_m}{K_m} + \frac{T\delta}{K_m}\right) + 3p^2 \delta' T_s \frac{T_i}{K_m}$$

$$G'(o) = 1 + \delta \frac{\alpha_r - \alpha_m}{K_m} \qquad H(o) = \frac{K_r}{K_m} a\delta$$

$$\gamma_{lim} = -\frac{\frac{K_r}{K_m} a\delta}{1 + \delta \frac{\alpha_r - \alpha_m}{K_m}} = -\frac{K_r a\delta}{K_m + \delta(\alpha_r - \alpha_m)}$$

Application numérique (fig. 44).

Turbo-alternateur à vapeur $T_i = 5$ secondes $T_s = 1$ seconde

$$\delta' = 0{,}02 \quad \alpha_r - \alpha_m = 2 \quad \delta = 0{,}04 \quad K_m = K_r = 1$$

$$T(\gamma) = -\frac{a(0{,}04 + 0{,}02\,p) - \frac{5}{1} p(0{,}04 + 0{,}02\,p)\gamma_o - 0{,}02\,\rho_o}{\cdot\, p(1 + (0{,}04 + p\,0{,}02)(2 + 5\,p)}$$

Le dénominateur s'écrit $p(1{,}08 + 0{,}24\,p + 0{,}1\,p^2)$
ses racines sont $r_1 = 0$

$$r_2 = \frac{-0{,}12 + \sqrt{0{,}0144 - 0{,}108}}{0{,}1} = -1{,}2 + i3{,}05 \quad r_3 = -1{,}2 - i3{,}05$$

Le régime transitoire est caractérisé par un coefficient d'amortissement de 1,2 et une pseudo-période de

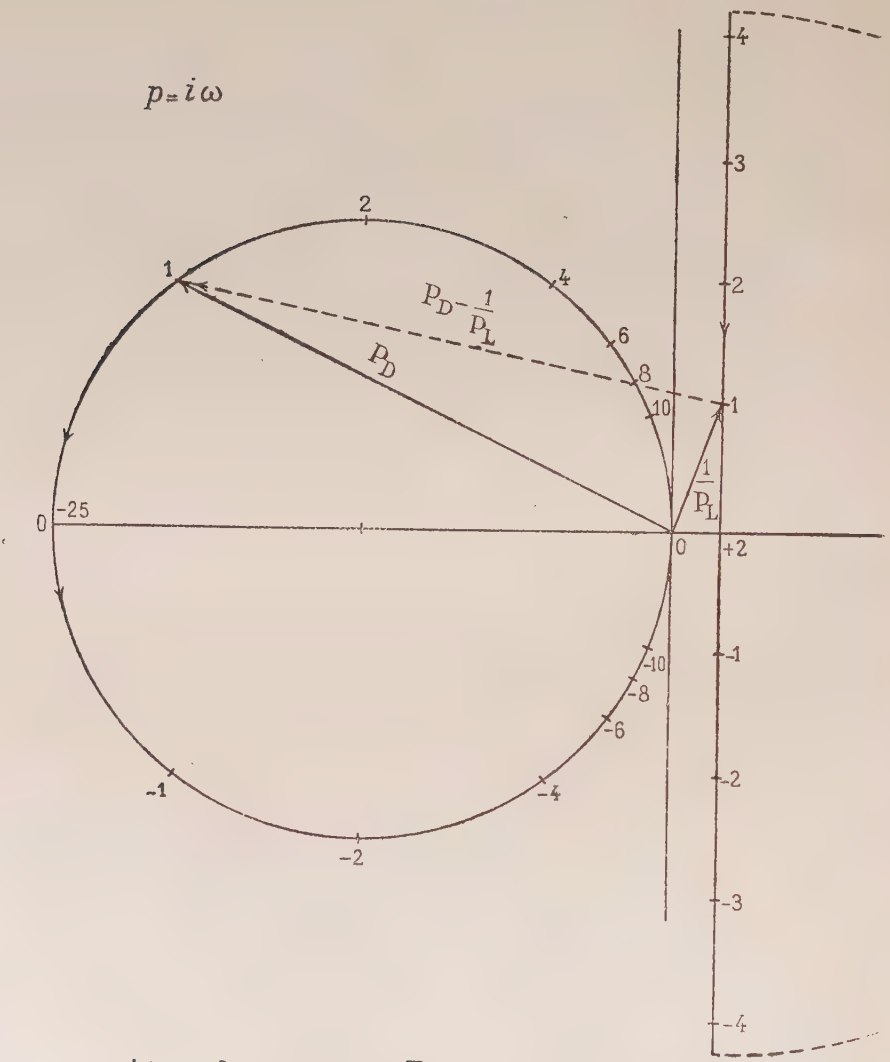
$$\frac{2\pi}{3{,}05} = 2{,}06 \text{ secondes}$$

La valeur limite de la vitesse réduite $\gamma = \frac{\omega - \omega_o}{\omega_o}$ a pour expression

$$\gamma_{lim} = -\frac{0{,}04a}{1 + 0{,}08}$$

pour une augmentation de 10 % de la grandeur libre au-dessus de la valeur de référence l_o, la vitesse limite est inférieure d'environ 4 °/₀₀ à la vitesse de référence ω_o, la quantité 0,08 du dénominateur représentant l'influence de la vitesse sur les couples moteur et résistant (La grandeur de réglage r et la grandeur libre l restant constantes).

P_D pour $\begin{cases} \delta = 0{,}04 \\ \delta' = 0{,}02 \\ T_s = 1 \end{cases}$ $\quad \frac{1}{P_L}$ pour $\begin{cases} \alpha_r - \alpha_m = 2 \\ K_m = 1 = K_r \\ T_i = 5 \end{cases}$



Lieux figuratifs de P_D et $\frac{1}{P_L}$ pour les valeurs numériques précédentes.

FIG. 44.

Combinaison d'une machine tournante et d'un régulateur accélérotachymétrique.

Machine tournante

$$T(\rho) = \left(\frac{\alpha_r - \alpha_m}{K_m} + p \frac{T_i}{K_m} \right) T(\gamma) + \frac{K_r}{K_m} T(\lambda) - \frac{T_i}{K_m} \gamma_o$$

Régulateur accélérotachymétrique

$$T(\sigma) = - \frac{1 + m p}{p \delta' T_s} T(\varepsilon) - \frac{- (m \varepsilon_o + \delta' T_s \sigma_o)}{p \delta' T_s}$$

avec les identités : $\varepsilon \equiv \gamma \quad \sigma \equiv \rho$

D'où

$$\left[- \frac{1 + m p}{p \delta' T_s} - \left(\frac{\alpha_r - \alpha_m}{K_m} + p \frac{T_i}{K_m} \right) \right] T(\gamma) =$$

$$= \frac{K_r}{K_m} T(\lambda) - \frac{T_i}{K_m} \gamma_o - \frac{m \gamma_o + \delta' T_s \rho_o}{p \delta' T_s}$$

$$T(\gamma) = - \frac{\frac{K_r}{K_m} T(\lambda) - \frac{T_i}{K_m} \gamma_o - \frac{m \gamma_o + \delta' T_s \rho_o}{p \delta' T_s}}{\left(\frac{1 + m p}{p \delta' T_s} + \frac{\alpha_r - \alpha_m}{K_m} + p \frac{T_i}{K_m} \right)}$$

Dans l'hypothèse d'un saut de la grandeur libre : $T(\lambda) = \frac{a}{p}$

$$T(\gamma) = - \frac{\frac{K_r}{K_m} a p \delta' T_s - \frac{T_i}{K_m} \gamma_o \delta' T_s p^2 - p (m \gamma_o + \delta' T_s \rho_o)}{p \left(1 + mp + \left(\frac{\alpha_r - \alpha_m}{K_m} + p \frac{T_i}{K_m} \right) (p \delta' T_s) \right)} = - \frac{H(p)}{G(p)}$$

Le dénominateur s'écrit :

$$p \left[1 + p \left(m + \frac{\alpha_r - \alpha_m}{K_m} \delta' T_s \right) + p^2 \frac{\delta' T_s T_i}{K_m} \right)$$

dont les racines sont : $r_1 = 0 \quad r_2$ et r_3

d'où :

$$\gamma = - \left[\frac{H(o)}{G'(o)} + \frac{H(r_2)}{G'(r_2)} e^{r_2 t} + \frac{H(r_3)}{G'(r_3)} e^{r_3 t} \right]$$

or : $$H(o) = 0$$

il en résulte que γ limite $= 0$. Le réglage ramène toujours à la valeur de consigne de la vitesse ω_o il est appelée « Astatique ».

Condition de stabilité.

a) Si $\alpha_r - \alpha_m > 0$ toujours stable (fig. 45).

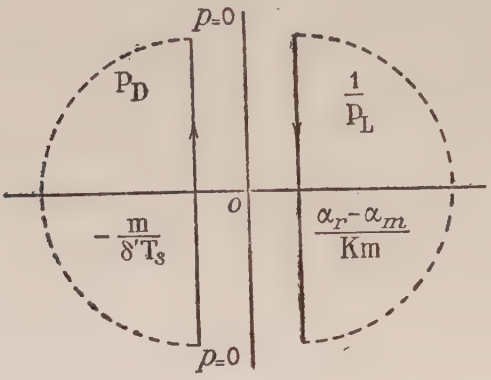


Fig. 45.

pas de variation d'argument de $P_D - \frac{1}{P_L}$ lorsque p décrit le contour de Bromwhich

b) Si $\alpha_r - \alpha_m < 0$

Stabilité si $\frac{\alpha_r - \alpha_m}{K_m} > \frac{-m}{\delta' T}$ (fig. 46, A)

Stable
pas de variation d'argument de $P_D - \frac{1}{P_L}$ lorsque p décrit le contour de Bromwhich

Instabilité s_i

$\frac{\alpha_r - \alpha_m}{K_m} < -\frac{m}{\delta' T_s}$ (fig. 46, B).

l'argument de $P_D - \frac{1}{P_L}$ varie de 4π lorsque p décrit le contour de Bromwhich

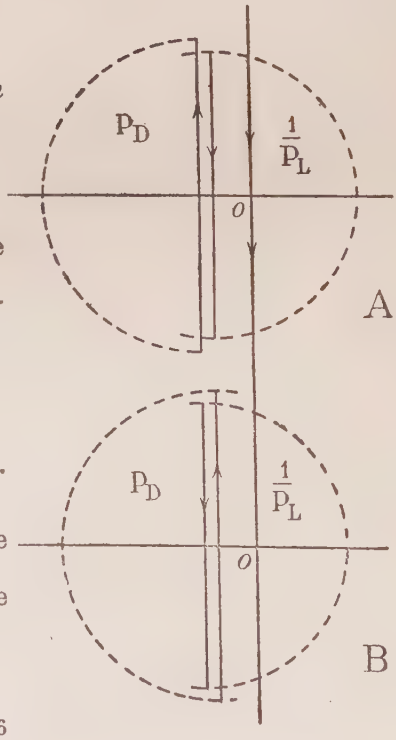
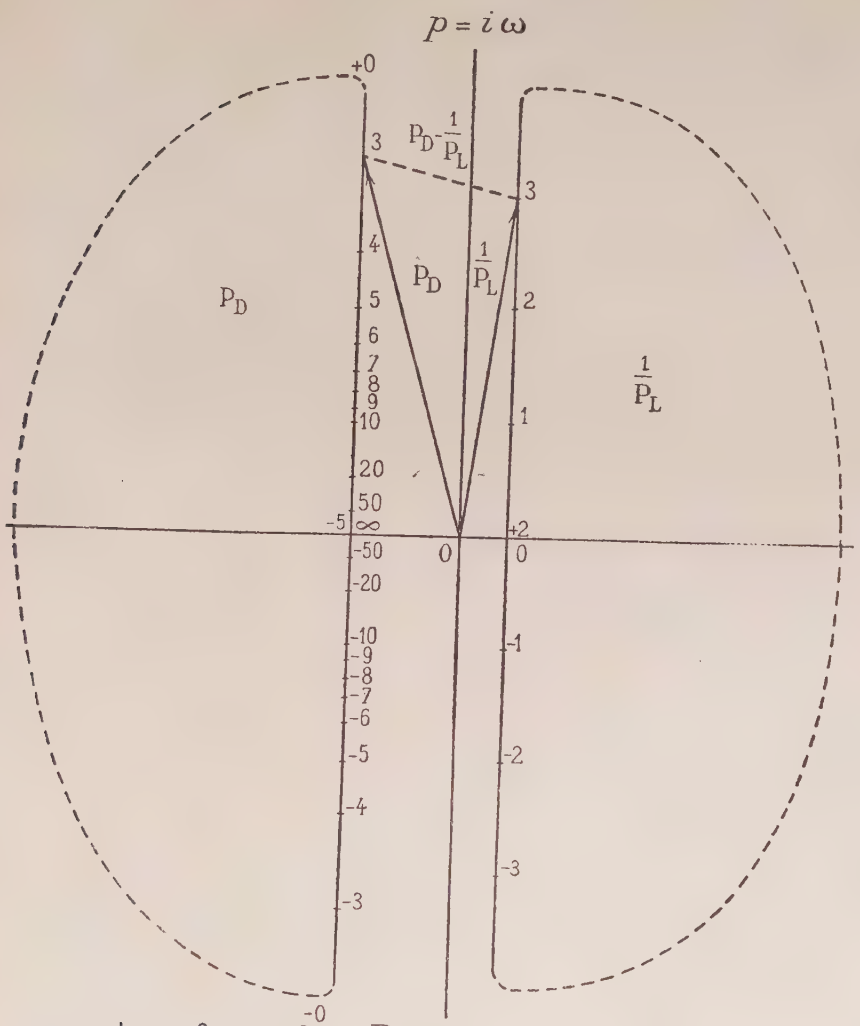


Fig. 46

Application numérique (fig. 47).

Nous reprenons l'exemple d'un turbo-alternateur à vapeur dont les caractéristiques sont :

$$T_i = 5 \text{ secondes}, \quad \alpha_r - \alpha_m = 2 \quad K_r = K_m = 1$$



Lieux figuratifs de P_D et $\frac{1}{P_L}$ pour les valeurs numériques précédentes.

FIG. 47.

et nous lui adjoignons un régulateur accélérotachymétrique de caractéristiques

$$T_s = 1 \text{ seconde} \quad \delta' = 0{,}02 \quad m = 0{,}1 \text{ seconde}$$

La transformée de la vitesse réduite a pour expression :

$$T(\gamma) = -\frac{0{,}02\,p\,a - 5 \times 0{,}02\,p^2\,\gamma_0 - p\,(0{,}1 + 0{,}02\,\rho_0)}{p(1 + 0{,}1p + (2 + 5\,p)\,(0{,}02\,p))}$$

$$= -\frac{0{,}02\,a - 0{,}1\,\gamma_0\,p - 0{,}02\,\rho_0}{1 + 0{,}14\,p + 0{,}1\,p^2}$$

Les deux racines du dénominateur sont

$$r = \frac{-0{,}07 \pm \sqrt{0{,}0049 - 0{,}1}}{0{,}1} = -0{,}7 \pm i\,3{,}08$$

Le régime transitoire qui suit la perturbation est un régime oscillatoire amorti de pseudo-période

$$T = \frac{2\,\pi}{3{,}08} = 2{,}04 \text{ secondes}$$

dont le coefficient d'amortissement est de 0,7.

Note sur la transformation de Laplace.

La transformation de Laplace fait correspondre à la fonction $f(t)$ de la variable réelle t la fonction $\varphi(p)$ de la variable complexe p au moyen de l'intégrale de Laplace

$$\varphi(p) = \int_0^\infty f(t)e^{-pt}\,dt$$

La fonction $f(t)$ est supposée satisfaire aux conditions suivantes :

a) elle est définie pour $t > 0$ et réelle ;

b) elle est intégrale et limitée dans tout intervalle fini limité par deux valeurs positives de la variable ;

c) l'intégrale $\int_\varepsilon^T f(t)\,dt$ tend vers une limite lorsque ε tend vers zéro (T positif) ;

d) l'intégrale $\int_0^\infty f(t)\,e^{-pt}\,dt = \text{limite}_{\varepsilon \to 0,\ \omega \to \infty} \int_\varepsilon^\omega f(t)\,e^{-pt}dt$ existe.

ε et ω étant supposés tendre indépendamment l'un de l'autre le premier vers 0 et le second vers ∞.

La fonction $\varphi(p)$ est appelée la « transformée » de $f(t)$ et l'on écrit :

$$\varphi(p) = \mathrm{T}\,[\,f(t)\,]$$

ou encore

$$\varphi(p) \subset f(t)$$

Le passage inverse de $\varphi(p)$ à $f(t)$ se fait sous certaines conditions convenables (1) au moyen d'une intégrale de Cauchy appelée généralement : intégrale de Mellin Fourier.

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \varphi(p)\, e^{pt}\, dp$$

C étant un nombre positif tel que toutes les singularités de (φp) se trouvent à gauche de $C \pm i\infty$

La fonction $f(t)$ est « l'original » de $\varphi(p)$ et l'on écrit

$$f(t) = \mathrm{T}^{-1}\,[\,\varphi(p)\,]$$

ou encore

$$f(t) \supset \varphi(p)$$

Exemples caractéristiques.

1° Transformée de $f(t) = \begin{cases} 0 \text{ pour } \leqslant t \\ a \text{ pour } \geqslant t \end{cases}$ $\quad \mathrm{T}\,(f(t)) = \dfrac{a}{p}$

2° Transformée de $f(t) = \begin{cases} 0 \text{ pour } \leqslant t \\ e^{\alpha t} \text{ pour } \geqslant t \end{cases}$ $\quad \mathrm{T}[\,f(t)\,] = \dfrac{1}{p-\alpha}$

3° Transformée de $\dfrac{d}{dt}\,(f(t)$

Soit $\varphi(p)$ la transformée de $f(t)$.

La transformée de $\dfrac{d}{dt}\, f(t)$ est $p\,\varphi(p) - f(o)$.

4° Transformée de $\displaystyle\int_o^t f(t)\, dt$.

Soit $\varphi(p)$ la transformée de $f(t)$.

---

(1) Consulter à ce sujet les deux ouvrages cités en bibliographie.

La transformée de $\int_0^t f(t)\,dt$ est $\dfrac{\varphi(p)}{p}$.

5° Original de $\varphi(p) = \dfrac{H(p)}{G(p)}$

H et G sont des polynomes en p le degré de G étant supérieur à celui de H.

a) $G(p) = 0$ n'a que des racines simples $p_1\ p_2 \dots p_r$.

La décomposition de $\dfrac{H(p)}{G(p)}$ en éléments simples permet d'écrire

$$\varphi(p) = \frac{H(p)}{G(p)} = \frac{H(p_1)}{G'(p)(p-p_1)} + \frac{H(p_2)}{G'(p_2)(p-p_2)} + \dots + \frac{H(p_r)}{G'(p_r)(p-p_r)}$$

L'original de $\dfrac{1}{p-p_1}$ est $e^{p_1 t}$ par conséquent l'original $\varphi(p)$ est

$$f(t) = \frac{H(p_1)}{G'(p_1)}\,e^{p_1 t} + \frac{H(p_2)}{G'(p_2)}\,e^{p_2 t} + \dots\dots + \frac{H(p_r)}{G'(p_r)}\,e^{p_r t}$$

b) cas d'une racine multiple :

La décomposition en éléments simples de $\varphi(p)$ conduit, dans le cas d'une racine multiple p_r d'ordre r à une suite de terme de forme :

$$\dots\dots + \frac{A}{(p-p_r)^r} + \frac{B}{(p-p_r)^{r-1}} + \dots\dots + \frac{Q}{(p-p_r)^2} + \frac{R}{(p-p_r)} + \dots\dots$$

L'original de $\dfrac{R}{p-p_r}$ est $R\,e^{p_r t}$.

L'original de $\dfrac{Q}{(p-p_r)^2}$ est $Q\,t\,e^{p_r t}$.

L'original de $\dfrac{A}{(p-p_r)^r}$ est $\dfrac{A}{(r-1)!}\,t^{r-1}\,e^{p_r t}$.

Il suffit pour obtenir ces relations de dériver par rapport à p la relation intégrale de Laplace, ce qui donne :

$$\frac{d}{dp}\,\varphi(p) \subset -\,t\,f(t)$$

$$\frac{d^n}{dp^n}\,\varphi(p) \subset (-1)^n\,t^n\,f(t)$$

BIBLIOGRAPHIE

Bouthillon (L.). — Conférences polytechniciennes, année 1943-1944, 2e série.

Doestsch (G.). — Theorie und Anwendung der Laplace. Transformation.

Gardner and Barnes. — Transients in linear systems.

Nyquist. — Regeneration theory. *Bell system technical Journal*, janvier 1932.

Lang. — Das Dämpfungsproblem in der Regelungstechnik. *Zeitschrift für technische Physik*, n° 11, 1942.

Leonard. — Neues Verfahren zür Stabilitätsuntersuchung. *Archiv für Electrotechnik*, janv.-février 1944.

Herwald. — Consideration in servomechanism design. *Transactions A. I. E. E.*, décembre 1944.

Cann, Herwald, Kirchbaum. — Electrical analogy methods applied to servomechanism problems. *Transactions A. I. E. E.*, février 1946.

Frey. — Généralisation des critères de stabilité de Nyquist et de Léonhard. *Revue B. B. C.*, mars 1946.

Whiteley. — Theory of servosystems with particular reference to stabilisation. *Journal of Institute of Electrical* Engineers, 1946.

Brown and Hall. — Dynamic behavior and design of servomechanisms. *Transactions A. I. E. E.*, juillet 1946.

Daniel (J.). — Etude d'une régulation. *Mesures*, nos 109 et 110, 1946.

Graham. — Linear servotheory, *Bell system technical Journal*, octobre 1946.

Gaden (D.). — Contribution à l'étude des Régulateurs de vitesse. Considérations sur le problème de la stabilité.

Cuénod (M.). — Etude des propriétés d'un réglage automatique. *Bulletin technique de la Suisse Romande*, 26 avril et 10 mai 1947.

Lauer (H.), Lesnick (R.), Matson (L. E.). — Servomechanism fundamentals.

DEUXIÈME THÈSE

Propositions données par la Faculté :

Sur le processus physique de formation des harmoniques par les redresseurs à vapeur de mercure

Vu et approuvé :
Paris, le 7 juin 1947.
Le Doyen de la Faculté des Sciences,
Jean CABANNES.

Vu et permis d'imprimer :
Le Recteur de l'Académie de Paris,
Jean CABANNES.

TABLE DES MATIÈRES

Pages

INTRODUCTION 6

PREMIÈRE PARTIE

Constitution du circuit de régulation. Classification des différents éléments et des différentes espèces de grandeurs qui s'y rencontrent 9

1. Constitution du circuit de régulation 9
2. Classification des éléments constituant un circuit de régulation. Éléments libres. Éléments dépendants 10
3. Classification des différentes espèces de grandeurs qui figurent dans les éléments du circuit de régulation 12
4. Théorèmes généraux sur le nombre des éléments de deux classes et celui des grandeurs des trois espèces qui se rencontrent dans un circuit de régulation 14
5. Emploi des grandeurs réduites 16
6. Choix des notations 21
7. Simplifications apportées à la réalité physique des éléments constituant un circuit de régulation 21

SECONDE PARTIE

Etude du circuit de régulation canonique d'une seule grandeur 23

1. Mise en équation du circuit de régulation canonique d'une seule grandeur 24
2. Choix de l'expression caractéristique d'un élément. Rapport de transmission d'un élément 30
3. Transformation des équations canoniques de la chaîne et du circuit de régulation d'une seule grandeur. Formation de l'équation transformée par composition des rapports de transmission 33
4. Conditions de stabilité du circuit de régulation d'une seule grandeur 35
5. Comparaison entre le circuit de régulation et le circuit électrique. Impédance symbolique du circuit de régulation ou régulance 45
6. Cas des mécanismes asservis 47

TROISIÈME PARTIE

Étude du circuit de régulation canonique de plusieurs grandeurs 49

1. Le circuit de régulation canonique de deux grandeurs 49
2. Le circuit de régulation canonique de n grandeurs réglées .. 56
3. Décomposition de l'élément semi-libre en plusieurs éléments de même nature physique groupés en parallèle 57

QUATRIÈME PARTIE

Les équations générales du circuit régulation 68

1. Le circuit de régulation complexe formé par la réunion d'éléments semi-libres et d'éléments dépendants comportant une seule grandeur de même espèce 69
2. Le circuit de régulation complexe formé par la réunion d'éléments semi-libres et d'éléments dépendants contenant plusieurs grandeurs de même espèce 79
3. Comparaison entre le circuit électrique et le circuit de régulation 91

CINQUIÈME PARTIE

Exemples concrets 93

1. Eléments semi-libres 93
2. Eléments dépendants 98

BIBLIOGRAPHIE 117

957. — Imprimerie Jouve et Cie, 15, rue Racine, Paris. — 1-49